ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
78

For Senior & Graduate Courses

重点解説
ベクトル・テンソル

物理的実在を求めて

◆

森川 雅博　著



サイエンス社

SGC ライブラリ- 78

重点解説
ベクトル・テンソル

物理的実在を求めて

森川 雅博　著

サイエンス社

まえがき

明白に見えるものでもそのすべてが実在というわけではないし，実在するものすべてが見えるわけでもない．自然現象を整合的に記述し実在するものとして理解しようとする物理学において，ベクトル・テンソル解析はその基礎となる．ここでは，物理学の出発点としてのベクトル・テンソル解析を，読者の皆さんと一緒に基礎から作っていきたいと思う．

気まぐれに見える自然現象の中から，物理的実在を同定し，その普遍的な運動を見出そうと思う．それが可能だという信念とその実証の長い歴史が物理学という文化を創っている．自然現象の観察を進めるとそれはどんどん多様になる．しかし，そのような多様な見え方の中から，実在とその運動を規定している法則はごく少数であり，そこから多様性が湧き出してくる．そのような経験を人間は数千年にわたり共有している．ここに物理学が成立するのだと考えられる．

特に，その物理的実在は「粒子」のような局在するものに限らない．むしろ，それは一般に時間的にも空間的にも広がっていて，「場（ば)」と呼ばれている．場を記述するには，空間的に隣同士でどのような相互作用をしているか知らなければいけない．また時間的に後の事象が先の事象にどのように関連するのかも知らなければいけない．物理的実在の場はさまざまだが，その現れ方には系統的な類型がある．この類型に着目して実在を記述するのがベクトル・テンソル解析である．

物理学は単に多数の知識の集積ではなく，基礎となる構造から演繹された階層構造をなすことが特徴であり，このことによって物理学は日々整合的に発展できる．このような生きた物理学を習得し，その発展に寄与するためには，論理の階層構造の中で自然を記述していくことを理解する必要があると思われる．これは個々の物理法則を，単なる運用手続きとしてその方法を習得することではなく，自然の要求に従って，常に批判的に階層構造を自分の感性と計算で確認していくことである．既存の構造は不完全であるかもしれないし将来修正を余儀なくされるかもしれない．この発展し続ける階層構造への関わり方に，各人の個性が現れるのだろう．

この本では，解析学と線形代数の基礎を出発点としよう．多様な物理的概念は，本来，必要があって文脈に沿って自然に導入されるものであるから，そのことを重視してできるだけ自然に記述していこう．

演習問題は，読者の個性を最も発揮しやすい形でまとめたい．これらは個々の法則や数学の運用を確認する手続きなどではなく，自然を階層構造の中で捉える試みである．1つの決まった手続きが想定されているわけではないので，そのままの文脈で答えがあるかどうかさえ不明である．ある文脈で答えらしきものが得られたら，あるいは得られなかったら，自分の感性に合うように設定を変形してみよう．この本ではそのような，文脈の発展に寄与する問題を作ってみた．答えを得る手続きが目的ではなく，自分の文脈を発展させて価値ある新たな問題を見出していくのが楽しい．物理学は今までそうやって多くの人々を楽しませてきた．数学，工学，物理，など広い階層の読者が

それぞれの個性を発揮できるように演習問題を考えた．

本文の論理や式の展開を批判的に確認して，理解できることと理解できないこと，承諾できるところとできないところをちゃんと区別することに専念しよう．理解できないところは，自分なりに論理を組み立ててみよう．すべて自分の納得した論理で構成していってみよう．でも，そのような構成が破綻することもあるだろう．そのときには基本に返って自分の論理を見直してみよう．その過程で突然，重要な鍵を理解できることが多い．個々の論理や数式を素直に順番に確認しながら進むと，往々にして，さまざまなところで自分が今どこにいいるのかわからなくなることがある．このようなときには自分の考え方を大事にしてそれをまとめてみよう．そして自分の計算を大切にしよう．

本書の目指しているのは，論理の自然な流れに乗って，物理学の階層構造の中でベクトル・テンソルが担う基本的役割を楽しく考え発見していくことである．自然現象を物理的に考えていくうちに，自然に数学が必要になり，それを自分流に作っていこう，というゆったりした雰囲気を楽しんでもらいたいと思う．

2010 年 9 月

森川 雅博

目　次

第 1 章
物理的実在

1.1　写像と自然の認識

自然の構造とその認識において，いたるところで写像が重要になる．写像とは，1つの「もの」からもう1つの「もの」への対応であり，自然を記述する上で最も基礎的な道具である．

$$\text{写像：1つのもの} \mapsto \text{もう1つのもの} \tag{1.1}$$

読者は山奥の静かな湖畔に佇み，晩秋の木々を吹き渡る夕暮れの風を感じている，としよう．一人ゆっくりと赤銅色の夕陽の湖面を見渡そう．水鳥の動いたあと，水面を向こうに伝わっていく波が生成し，それはたくさんの細かな波に形を変えながら幅を広げて減衰しながら拡散してゆく．その波頭は，各時刻ごとに湖面の特定の位置を占めつつ進んで周りの岩に反射しやがて消えていく．湖水に手を入れ大きく動かすと複数の渦ができ，水面に落ちた木の葉を巻き込みながら手を離れて動き出し，やがてどこかに減衰し消滅する．思索しながら長い時間湖畔を歩いた．すでに陽は落ち，明るい満月を隠し始めた群雲は時々刻々流れ，満月に映し出されたその様相を変えていく．浅い湖底に映る光線の影は，すばやく動き，複雑な網目模様を作る．いつからか降り始めた粉雪は，風に吹かれて気ままに漂いながら音なく水面に吸収される．

この湖の底には大きな穴があり，箱島の湧水へと続いているらしい．古い木の根元から懇々と湧き出るその豊かな水は勢いよく流れ，滝になって砕け散り落ちてゆく．この水が利根川を通って行き着く先の太平洋では，水はもっと大きな規模で複雑に流れている．海の上の大気の流れはさらに複雑で，時折大きな渦を作り台風やハリケーンとなる．こんな複雑な様相がなぜ水や空気の流れの上に生成され，やがて消滅していくのだろうか？

生成消滅するものは流体に限らない．星だって塵が集合し協同し，エネルギーを拡散して爆発し消滅する．生物でさえ，集合し協同するものが太陽エネルギーの流れの中で構造を生成し機能しやがて消滅していく．多様な原子も，その構

成要素が融合したり分裂したり生成消滅を繰り返している．素粒子でさえそのほとんどは短命で生成消滅を繰り返す．このような生成消滅を整合的に記述するのが物理学である．その生成消滅の大きな舞台となるのが広がった空間であり，時間の流れである．

これらの現象を我々が認識するとき，基本になるのは写像である．これは「もの」から「もの」への対応関係を与える．対象となるものとしては，局在した粒子であったり，広がったもの（場と呼ばれる：後述）であったりする．

まず局在する個々の粒子，という対象物を雪の例で考えてみよう．ある時刻 T に，雪の粉の一粒は 3 次元の空間の中で特別な場所 P に位置している．これは時刻と場所の関連を表現する写像

$$T \mapsto P \tag{1.2}$$

として表される．

もっと正確に表現してみよう．T は例えば自分の時計の読み t であり，当然これは実数である（$t \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ は実数全体を表す）．この t を**時間座標**と呼ぼう．P は 3 次元に広がった空間の一点である．この点を表すのに，自分を中心にして右手に x^1 メートル，前方に x^2 メートル，鉛直に x^3 メートル，と 3 つの実数値を指定すればよいだろう．つまり，空間の一点 P にある対象物に対して，その位置は数値を 3 個付与すれば決定する．これは経験事実であり，我々はかつてこのような方法で本質的困難をきたしたことはない．もっと具体的には，水平面上に第 1 軸と第 2 軸をお互いに直角をなすようにとり，地面に鉛直に第 3 軸をとり，自分の位置を中心に長さをメートルで測って，それぞれに実数値，x^1, x^2, x^3 を付与すればよい．すべての要素が実数であること，つまり $x^1, x^2, x^3 \in \mathcal{R}$ ということを端的に $\{x^1, x^2, x^3\} \in \mathcal{R}^3$ と書く．$\mathcal{R}^3$ は実数の 3 次元の空間である．この方法を**空間座標**と呼ぼう．これらの数値を x^i と略記

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \left(x^i\right)_{i=1,2,3} = \vec{x} \tag{1.3}$$

すると，時間や空間を実数で表す方法はやはり写像である：

$$\text{時間座標} : T \mapsto t, \tag{1.4}$$

$$\text{空間座標} : P \mapsto \vec{x}. \tag{1.5}$$

考えている時間空間の定義域や，実数値のとりうる範囲（値域）の限定などはあまり気にせず進んでみよう．上の写像 (1.2), (1.4), (1.5) を組み合わせて，写像

$$\begin{array}{ccc} T & \mapsto & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ t & & \vec{x} \end{array} \tag{1.6}$$

ができる．ここでもし，写像 $T \mapsto t$ が「良い」座標であれば，これは1対1の対応である．つまり逆 $t \mapsto T$ が一意的に存在し，上の粉雪の一粒は，$t \mapsto T \mapsto P \mapsto \vec{x}$ を通じて結局

$$t \mapsto \vec{x} \tag{1.7}$$

と表される．この写像は，一粒の粉雪が運動する中で，時刻 t における場所 $\vec{x}$ を対応させる写像である．

着目したこの粉雪は次の瞬間 T' にはすでに別の場所 P' に移動している：

$$T' \mapsto P'. \tag{1.8}$$

座標で書けば，

$$t' \mapsto \vec{x}' \tag{1.9}$$

となる．ここまで，個々の時間に対して1つずつ決まる位置を与える写像を記号 $\mapsto$ で書いた．

すべての時刻にこの雪の粒の位置を確認することはできないが，おそらく連続に運動しているとみてよいだろう．また空間の位置を表す数値はひょっとしたら離散的かもしれないが，実用上は連続としてしまってよいだろう．これらの連続的な性質は，観測可能な限りで，いくらでも細かく滑らかに対応させることができるという経験からの推測である．したがって，一般に，観測している時間を t_1 から t_2 までとすると，区間 $I \equiv [t_1, t_2] \subset \mathcal{R}$ に対して，「$\mathcal{I}$ の中の1つから $\mathcal{R}^3$ の中の1つへの写像」の全体は $\mathcal{I}$ から $\mathcal{R}^3$ への大きな写像を作る．この，集合から集合への写像を記号 $\rightarrow$ で書こう：$\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}^3$．時間範囲に対してあまり細かいことを言わなければ，単に

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 \tag{1.10}$$

としてよいだろう．この，集合から集合への写像を端的に $\vec{x}(t)$ と書いたりする．この記号 $\vec{x}(t)$ は，時刻 t における空間の値 $\vec{x}$ の意味でも使われる．ちょっとあいまいだが議論を進める文脈の中で考えるとどちらかは明白である．このような座標基準系を導入した定量的な記述は物理学の大きな特徴の1つである．以上の話で，座標を決めて，時間を $\mathcal{R}$ で，空間を $\mathcal{R}^3$ で表現するのはモデルである．実際の時間全体 $\{T\}$ と空間全体 $\{P\}$（と我々が認識しているもの）が，それぞれ $\mathcal{R}, \mathcal{R}^3$ と同じである保障はない．

さらに，雪の粉たちはたくさんあるので，それぞれを i で識別しよう ($i \in N \equiv \{1, 2, 3, \cdots\}$)．これは，種類と時刻の組 $\{\text{種類}, T\}$ から，そのラベル $\{i, t\}$ を対応させる写像である．

$$\{\text{種類}, T\} \rightarrow \{i, t\}\,. \tag{1.11}$$

それぞれの粉は，時間の経過に従って3次元空間に軌跡を描いていく．これを

先ほどの写像 (1.4), (1.5) を組み合わせて，写像

$$\begin{array}{ccc} \{\text{種類}, T\} & \mapsto & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{i, t\} & & \vec{x} \end{array} \tag{1.12}$$

ができる．もし写像 $\{\text{種類}, T\} \mapsto \{i, t\}$ が良い座標であり，1 対 1 であるなら，つまり逆写像があれば，これは写像：

$$\{i, t\} \mapsto \vec{x} \tag{1.13}$$

を作る．これは $\{N, \mathcal{R}\} \to \mathcal{R}^3$ という写像であり，粒子の運動のラグランジュ的記述と呼ばれる．この写像を端的に，$\vec{x}_{(i)}(t)$ と書いたりする．ここで前提になっているのは，雪の一粒が時間的にずっと自己同一性を持っているので，単一のラベル i を付与できるということである．

さらに，粉雪の運動の速さを表す速度も考えてみよう．速度の実体 V は本来勝手に決められるものではないだろうが，機械的に座標系を用いて，速度らしきものが定義できる．つまり，速度 $\vec{v}$ は位置 $\vec{x}$ の単位時間当たりの変化である，とするのである．つまり，時刻 t における粒子の位置 $\vec{x}$ と時刻 t' における位置 $\vec{x}'$ を用いて，

$$\vec{v} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{t' - t} \tag{1.14}$$

と決めるのである．$\vec{v}$ は 3 つの実数成分を持つ．ここでは直感的に位置の差 $\vec{x}' - \vec{x} \equiv \left(x'^i - x^i\right)_{i=1,2,3}$ や，実数での除算 $(\vec{x}' - \vec{x}) / (t' - t) \equiv \left(x'^i - x^i\right) / (t' - t)_{i=1,2,3}$ を用いた．これらは自然な定義であり，広く物理で有用であった．上で定義した速度も写像

$$\begin{array}{ccc} \{\text{種類}, T\} & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{i, t\} & \to & \vec{v} \end{array} \tag{1.15}$$

であり，特に，$\{i, t\} \mapsto \vec{v}$ は式 (1.14) から直接に決められた．また V は，式 (1.14) で表現されている速度の実体である．この写像は，

$$\{i, t\} \mapsto \vec{v}, \tag{1.16}$$

$$\{N, \mathcal{R}\} \to \mathcal{R}^3 \tag{1.17}$$

と書けるが，端的に $\vec{v}_{(i)}(t)$ と書いたりする．これは，i 番目の粉雪の時刻 t における速度 $\vec{v}$ という意味である．前と同様，写像全体も個々の数値も，同じ記号で書くのが慣例で，議論の文脈で読み分ける．

以上は粉雪一粒一粒の運動の記述であり，具体的にその運動を解明するためには，吹いている風や重力などの相互作用を取り入れて，写像を具体的に構成しなければならない．それが物理学の仕事である．

粉雪から湖や海の水に目を移してみよう．水の分子が自己同一性を持ったものとして識別できるなら，自然数 i で標識して ($i \in N$)，個々の分子はやはり上のように写像されるだろう．

$$\{i, t\} \mapsto \vec{x}, \tag{1.18}$$

$$\{N, \mathcal{R}\} \to \mathcal{R}^3 \tag{1.19}$$

あるいは，時刻 t ごとに，水の分子 i に対する速度 $\vec{v}$ が写像されるだろう．

$$\{i, t\} \mapsto \vec{v}, \tag{1.20}$$

$$\{N, \mathcal{R}\} \to \mathcal{R}^3. \tag{1.21}$$

ただし，水の分子一つ一つを識別するのは大変難しい．

以上では，対象物は局在する個々の粒子であった．しかし，もっと一般に**広がった対象物**も存在する．例えば，温度 U とか，鉄イオン，ナトリウムイオン，カルシウムイオンなどのいろいろな海水成分（k で標識しよう）の密度 $\sigma_{(k)}$ の写像も考えたい*1．これらは個々の分子に付随する量ではない．むしろ少し広がりを持った液体の微小領域（素片）に付随する量である．広がっているのでそれらはいずれ拡散していき，もはや永続的な自己同一性を持たない．この場合は個々の液体粒子にとらわれないで，むしろ流体の中に点を固定した記述のほうがよいだろう．つまり，点 P を固定しその空間座標を $\vec{x}$ とする．その点（近傍）で温度 U を測ってその値が u ($\in \mathcal{R}$) であるとすると，今までと同じように，写像

$$\begin{array}{ccc} \{P, T\} & \overset{f}{\mapsto} & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \widetilde{\varphi} \\ \{\vec{x}, t\} & & u \end{array} \tag{1.22}$$

ができる．今回は写像に名前をつけてみた．φ は座標と呼ばれる写像である．f は温度の場（後述）と呼ばれる写像である．$\widetilde{\varphi}$ は温度の読みと呼ばれる写像である．座標 $\varphi : \{P, T\} \mapsto \{\vec{x}, t\}$ が 1 対 1 であり逆があれば，(1.22) は写像

$$\{\vec{x}, t\} \mapsto u, \tag{1.23}$$

$$\{\mathcal{R}^3, \mathcal{R}\} \to \mathcal{R} \tag{1.24}$$

を作る．つまり，場所 P を表す空間座標 $\vec{x}$ を指定し，時刻 T を表す t を指定するごとに，温度 U を表す u が決まっていく．この写像を端的に $u\,(t, \vec{x})$ と書いたりする．同様に密度 $\sigma_{(k)}$ はその測定値が $s_{(k)}$ なら，

$$\{\vec{x}, t\} \mapsto s_{(k)} \tag{1.25}$$

*1 素片に付随した量がその素片の体積に線形に依存するとき，それは示量的であるという．この場合，周辺の単位体積あたりの量で代表させて，その量の密度と称する．素片に付随した量がその素片の体積に依存しないとき，それは示強性であるという．

となる．この写像を端的に $s_{(k)}(t,\vec{x})$ と書いたりする．

空間点を固定したこのような記述に顕著に表されるように，時間空間の各点 $\{P,T\}\in M$ に，物理的な量 F（$U,\sigma_{(k)},V$ など）を付随させる写像 f があまねく存在する．そしてそれらの測定の結果得られる数値は，写像 φ によって座標値 $\{\vec{x},t\}\in\mathcal{R}^4$ に，写像 $\tilde{\varphi}$ によって値 $\in X$ に，具現できる．この写像 f は「**場**」と呼ばれ，物理的な対象物を記述する基本的な構造である：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\tilde{\varphi} \\ \mathcal{R}^4 & & X \end{array} \tag{1.26}$$

これはオイラー的記述と呼ばれ，先に述べた自己同一性を持った個々の粒子に着目するラグランジュ的記述に対比される．このように，場は，時間空間を定量的に表す座標 $(t,\vec{x})$ および物理量を定量的に表す量 $\left(u,s_{(k)},\vec{v}\text{など}\right)$ を導入してはじめて具体的に決められる．物質にとどまらず，それらの相互作用を表すいくつかの力もまた時間空間的に広がった場であるという認識は，現代物理学の基礎となっている．つまり，あらゆる物質もあらゆる力も，その基本に場という構造を持っている．場の考え方の基本になっているのは，以下述べる近接相互作用の視点である．図 1.1 に，場を視覚的に表現してみた．

1.2 いろいろな場

今までの話では，いろいろな現象はすぐ目に見えた．あるいは直感的に捉えてすぐ測定できた．しかしそれらすぐ目に見えるものは，自然界の実在のうちのほんの一部でしかない．我々は経験と実験から種々多様な，すぐには目に見えない実在形態とその属性を知っている．例えばゴムなどの弾性体内部に働く応力，粘性，あるいは陽子，中性子，電子，ニュートリノなどの素粒子も，広がりを持つ場で記述される．これらの場を直接目で見ることはできないが，精巧に作った測定装置を介して場は目に見える信号となり，我々はその実在を確かに認識することができる．それら複雑な信号の間の相関を系統的に解明することによって，自然の成り立ちを理解していくのが物理学である．

物質だけでなく，力も考えてみよう．身近で典型的なのはクーロン力である．粒子 1（電荷 e_1）と粒子 2（電荷 e_2）が距離 r だけ隔たっているとき，お互いの粒子に働く力は，お互いの粒子の方向を向き，その大きさは

$$-\frac{ke_1e_2}{r^2} \tag{1.27}$$

と表され，e_1,e_2，距離 r，それと電磁相互作用の強さを表す定数 k だけで表現される．これだけなので，力を表現する広がった場を独立なものとして介在させる必要性はないように思える．これは磁石の作る力も同様である．さらに重

力でも同様である．太陽の作る重力は遠く離れた惑星をいつもひきつける．その力は，お互い他の天体の方向を向き，その大きさは

$$\frac{GMm}{r^2} \tag{1.28}$$

と表され，太陽（質量 M）と惑星（質量 m）の隔たり r，重力相互作用の強さを表す定数 G だけで表現される．これだけなので，重力を表現する独立な場は不要であるように思われる．しかし電磁気力や重力に対するこのような遠隔力の考え方は，今まで限定的にしか成功しなかった．

例えば，圧電素子やコイルから放たれた電磁波は，間にある空間の属性を反映して変形しながら順々に伝わり，遠く離れた地点にある受信機を作動させる．ここで電磁波 F を定量的に電場 $\vec{E}\left(\in \mathcal{R}^3\right)$ および磁場 $\vec{B}\left(\in \mathcal{R}^3\right)$ と記述すると，電磁場は写像

$$\begin{array}{ccc} \{P,T\} & \overset{f}{\mapsto} & F \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \widetilde{\varphi} \\ \{\vec{x},t\} & & \{\vec{E},\vec{B}\} \end{array} \tag{1.29}$$

で表現される．これから定量的な写像 $\vec{E}\,(\vec{x},t)$

$$\{\vec{x},t\} \mapsto \vec{E} \tag{1.30}$$

および $\vec{B}\,(\vec{x},t)$

$$\{\vec{x},t\} \mapsto \vec{B} \tag{1.31}$$

が決まり，これらは真空中を光速度 c で伝播し，荷電粒子と相互作用する．そして，クーロン力も電磁波も同じ法則で記述される電磁場であり，荷電粒子が周囲に作り出す場が順々に遠方に広がると考える近接力の記述がすべての実験と整合することがわかっている．素朴な電気力線や磁力線で視覚化される空間的な広がりは自己同一性を持って本来，粒子とは独立に実在するのである．

同様に重力の場合も，物質があれば周囲の時間空間を順々に歪めて伝播すると考えて時間空間の場を導入する近接力の記述は，より精緻な一般相対論として成功している．つまり重力は，写像

$$\begin{array}{ccc} \{P,T\} & \overset{f}{\mapsto} & F \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \widetilde{\varphi} \\ \{\vec{x},t\} & & g \end{array} \tag{1.32}$$

で表現される場 $g\,(t,\vec{x})$ であり，写像

$$\{\vec{x},t\} \mapsto g \tag{1.33}$$

であって，これはエネルギーを持った粒子と相互作用する．ただし，この重力

の問題を突き詰めていくうちに，重力の物理的実在が問題になってくる．これは最終の章で議論しよう．

すぐには目に見えないこれらの場は，空間的に隣り合った場所どおしの力のかかり具合やエネルギーや運動量の伝播を記述し，自身でもエネルギー・運動量を持つ物理的な存在である．これらを明確に同定して，その構造，運動，そして相互作用を解明していくのも物理学である．

我々が追究している広がった実在，場，はどのように記述されるのだろうか？流体を構成するのが原子や分子であるなら，それらの粒子は空間にばら撒かれて分布しているのだろう．そして個々の粒子は，もしそれらが自己同一性を持っているなら，その空間の中を時間とともに運動するだろう．もし個々の粒子が自己同一性を持っていなければ，それぞれの粒子に追随していくことはできず，むしろ空間の任意の各点各点に物理量が付随しているようにみるのがより自然だろう．力なり情報を担った信号なり，エネルギーはそのような広がった物理量の連続的な伝播であろう．つまり，隣どおしの空間点に付随した物理量が情報を伝え合い，最終的に有限の距離に情報が伝わると考えられる．これが近接的な作用である．

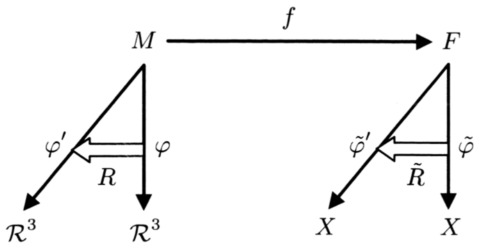
1.3 相対性原理

我々は，複雑で多様に見える自然現象を定量的に考察し，その属性を写像という形で整理してきた．この定量的手法こそ，物理学の大きな特徴なのだ．この定量化に際し，時間空間の座標の導入や物理量の定量化を進めてきた．これは，自然を観測している我々が，ある 1 つの視点を固定することでもある．この固定した視点で現象を定量的に記述するのであった．この固定なくしては，時間空間の数値も物理量の数値も確定しない．

ここで 1 つ問題が発生する．時間空間の座標の導入や物理量の定量化は一意的ではない，ということである．つまり，固定する座標系 φ を変更すれば当然見え方 $\tilde{\varphi}$ も連動して変わってしまう．しかしこれは困った問題である以上に，積極的に，どのように物理的実在を規定するか，という方法を与える．つまり，対象が物理的実在であれば，視点の変更 R によって何らかの，見え方の規則 $\tilde{R}$ が存在するだろう．規則が存在するというこの系統性を物理的実在の自然な条件とすることができる．そしてこのことによって我々は，見かけだけの規則性がなく再現性のない非物理的現象と，実体を伴った普遍的な物理的現象とをはっきり区別することができる．実は我々は無意識に，いつもそのように実在を確認しているのである．

先ほどの，場を表す写像に，視点の変更 R を持ち込んで描いたのが次式 (1.34) の表示である．R は座標写像の変換を表す．つまり $R : \varphi \mapsto \varphi'$ である．これに連動して，場の見え方 $\tilde{\varphi}$ も変換を受ける：$\tilde{R} : \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}'$．この連動した相関，

R から $\tilde{R}$ への関係が系統的であれば，その系統性を保障する要因が場 F 周辺に存在するはずである．このようにして，我々は背後にある場 F を物理的実体として捉えることができる．



(1.34)

例えば，物体の形について考えてみよう．3 次元空間にある点は，当然どの方向から見ても形を変えない．線分は，視点を回して見ると長さが変わって見える．最も長く見える視点から角度 θ だけ回った視点から見ると長さは $\cos\theta$ 倍に短く見える．この系統性があるから，我々はそれを線分だと認識する．もし $\cos\theta$ 倍以外の系統性を示すなら，我々はそこに，光の屈折や干渉など何らかの仕掛けを意識する．もし十分検討してもなんら系統性がなければ，それは暫定的に物理的な実在でないと判断するのは妥当であろう．状況は面分も同様である．

また，球はどこから見ても円に見える．立方体は見る視点によって，正方形であったり，長方形であったり，正 6 角形であったりする．見え方は系統的に決まっていて視点を定めれば見え方は確定する．実在とはもともとそういう存在である．逆に，視点の変更に対して系統的な見え方をするものの総体が実在であり，それは個々にばらばらに存在しているのではなく，自己同一性を保持している，と言うこともできるだろう．さらにまた，視点を移してみただけの個々の見かけの様子は実在の断片的な側面でしかないが，その系統的な変化の仕方の総体は，実在のありようを特徴付けている，と言うこともできる．このように自己同一性を保持した実在を物理量と呼ぼう．そしてこの物理量を我々の考察の対象としよう．物理法則とは物理量に関する関係の言明であるから，その法則自体もやはり視点の変更に際して系統的な見え方を呈するべきである．物理法則としての条件はそのように規定される．この考え方は相対性原理と呼ばれ，やはり物理学の根幹を成す要素である．

当然ながら，どのように視点の変更範囲を決めるか，に関しても複数の可能性があり，「物理量」の内容も，その規定された変更範囲に依存する．例えば，のちに詳述するように，粒子の速度 $\vec{v}$，電場 $\vec{E}$ や磁場 $\vec{B}$ は，空間の 3 次元回転に関してはベクトルであるが，時間空間のローレンツ変換に関してはもはや 3 次元ベクトルではなく，$\vec{v}$ は 4 次元のベクトルの一部，電場 $\vec{E}$ や磁場 $\vec{B}$ はあわせて 4 次元の 2 階反対称テンソルの成分を成している．したがって電場 $\vec{E}$ は，空間の 3 次元回転変換の範囲では，それに対応した自己同一性を持った物理的実

在であり，電場以外のものに姿を変える余地はない．磁場 $\vec{B}$ も同様に，独立した物理的実在である．しかし，時間空間の 4 次元ローレンツ変換まで変換範囲を広げれば，電場 $\vec{E}$ それ自身はもはや自己同一性を持った実体ではなく，磁場 $\vec{B}$ がその裏の姿として現れてくる．この詳細は特殊相対論の章で議論しよう．

さらに一般化して，時間空間とは関係のない変換に対しても，個々の見え方が異なるがそれが系統的であれば，その表現しているものは 1 つの実体である，と考えるのは自然である．そして物理法則もそのように規定される．このような拡大された相対性原理は物理学のいたるところで現れる普遍的な手法である．

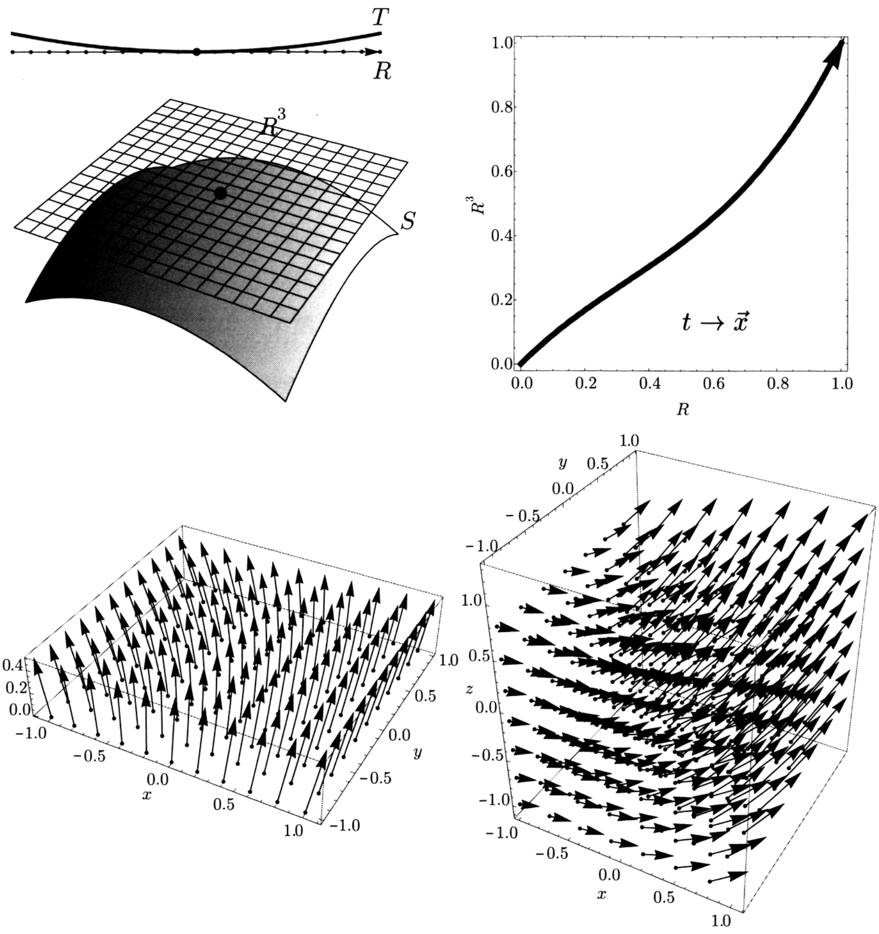


図 1.1　いろいろな場を表した図．

上左：（上）時間 T は時間座標 φ によって実数 $\mathcal{R}$ 上に写像される．向きは時間の進行する方向．（下）3 次元空間 S は空間座標 φ によって $\mathcal{R}^3$ 上に写像される．図では 2 次元 $\mathcal{R}^2$ で表示されている．

上右：ひとつの粒子の運動は，時間 T から空間 S への写像である：$T \to S$．これを時間・空間座標 φ を用いて，$\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}^3$ への写像：$t \to \vec{x}$ として表示している．図では $\mathcal{R}^3$ の代わりに $\mathcal{R}$ として表示されている．

下左：$x - y$ 面上の 3 次元ベクトル場．空間 S は空間座標 φ により $\mathcal{R}^2$ によって表さ

れ，場 F は座標 $\bar{\varphi}$ により $\mathcal{R}^3$ によって表されている．このような座標によって，ベクトル場は（$x-y$ 面で表示されている）$\mathcal{R}^2$ から $\mathcal{R}^3$ への写像になる．つまり，（$x-y$ 面上，黒丸で示した 1 点）$\in \mathcal{R}^2$ に対して，（ひとつの矢印で示されたベクトル）$\in \mathcal{R}^3$ が対応する．従ってこの図には，場所を表す空間 $\mathcal{R}^2$ と場を表す空間 $\mathcal{R}^3$ が一緒に表示されている．黒丸点は前者に，矢印は後者に属する．

下右：下左のベクトル場の表示方法を用いて，ベクトル場 $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ を表示した．この図には，場所を表す空間 $\mathcal{R}^3$ と場を表す空間 $\mathcal{R}^3$ が一緒に表示されている．黒丸点は前者に，矢印は後者に属する．

【参考書籍】

- 「数学—物理を学び楽しむために—」暫定版（2010 年 3 月），田崎晴明．http://www.gakushuin.ac.jp/ 881791/mathbook/
- 「量子場を学ぶための場の解析力学入門　増補第 2 版」(KS 物理専門書)，高橋康，柏太郎，講談社 (2005).

第 2 章

テンソル——実在の様式

この章では，式 (1.26) そして式 (1.34) で表される場の構造を具体的に作っていこう．

2.1 座標系 φ

まず，空間の定量的な表現を考えていこう．とりあえず時間依存性は脇に置いて，3 次元空間だけを考えて座標系の構造を具体的に考えてみよう．これは，

$$\varphi : S \longrightarrow \mathcal{R}^3 \tag{2.1}$$

あるいは，空間 S の点 P に対して $\varphi(P) = \vec{x}$ である ($\vec{x} \in \mathcal{R}^3$)．この「座標系」を与える写像 φ の構造は何も特別なものが初めから決まっているわけではない．では，写像 φ をどのように組み立てたらよいだろうか？ もし S が不明なら何も言えない．そこで今までのように，写像 φ は良い座標で 1 対 1 の対応を与えると考えてみよう．すると S は空間 $\mathcal{R}^3$ と同様な構造であろうとある程度想定できる．$\mathcal{R}^3$ であれば，その要素 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{R}^3$ に対して，その和

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3 \tag{2.2}$$

や実数 λ との積

$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \lambda x^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3 \tag{2.3}$$

などが自然に決まる．つまり，和・積が計算できて同じ空間の中にある．これらの性質は非常に基本的で，以下に議論するさまざまな性質や，式 (1.14) におけるような微分や積分ができるためにも必須である．この重要な性質を表す式

(2.2), (2.3) を線形性と呼ぼう．そして我々は，空間 S と $\mathcal{R}^3$ はあまり違わないと想定することにしよう．さらに上の和と積がそのまま，空間 S の元に対しても存在すると想定しよう．これは大きな設定である．このことの妥当性は，最終的には実験と観測によって実証されるが，どうなっているかわからない空間 S の全域ではなく，局所的な領域に限れば，たいてい許されるだろう．特に，微小領域においてはおそらく問題なく妥当であると考えられるし，ここでは写像 φ は 1 対 1 の対応を与えるだろう．したがって，空間 S の各場所の近傍での考察をまず進め，最終的にはそれらをつなぎ合わせることを考えよう．このことを正確に規定しておこう：全空間 S に対して，我々が居る点 O の近傍でだけ，近似的にユークリッド空間 $\mathcal{R}^3$ の構造を想定する．そしてこの $\mathcal{R}^3$ は点 O の近傍で S の十分良い記述になる，と期待しよう．一方，点 O から遠く離れたらこの $\mathcal{R}^3$ の構造はもはや S とは無関係になるだろう．その場合は，この新しい点の周りで S を近似する $\mathcal{R}^3$ を新たに想定したらよいだろう．これは曲線を，各点の接線で（近似的に）表現するのに似ている．個々には近似的であっても，曲線すべての点での接線を総合して考えれば，正確な表現になるだろう．とりあえずこの章では，ある点 O の近傍の局所的な場合を考えて，しばらく S の線形性を認めて，考えを進めてみよう．したがって以下，あからさまには記述しないが，座標原点はこの点 O に固定しよう．

我々は，$\mathcal{R}^3$ だけでなく S に対しても式 (2.2), (2.3) が成立すると仮定して進む．つまり，$P, Q(\in S)$, $\lambda(\in \mathcal{R})$ に対して，

$$P + Q \in S \tag{2.4}$$

および

$$\lambda P \in S \tag{2.5}$$

となることを仮定する (細かく言えば, ここでの操作, “+”, “λ”, は式 (2.2), (2.3) の意味と異なるかもしれないがかまわない)．座標系 φ が, $\varphi(P) = \vec{x}$, $\varphi(Q) = \vec{y}$ という対応を与えるとすると，写像としての φ は

$$\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q), \tag{2.6}$$

$$\varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P) \tag{2.7}$$

を満たす．このような写像を線形写像と呼ぼう．逆に，縮退していない線形写像，すなわち S と $\mathcal{R}^3$ の要素を 1 対 1 に対応づける線形写像，ならば何でも，座標系としての資格がある．

今度はこのような線形写像 φ, σ に対して，その和と実数の積を，

$$(\varphi + \sigma)(P) = \varphi(P) + \sigma(P), \tag{2.8}$$

$$(\lambda\varphi)(P) = \lambda\varphi(P) \tag{2.9}$$

で定義するのは自然である．すると，この和 $(\varphi + \sigma)$ は

$$
\begin{aligned}
(\varphi+\sigma)(P+Q) &= \varphi(P+Q)+\sigma(P+Q) \\
&= \varphi(P)+\varphi(Q)+\sigma(P)+\sigma(Q) \\
&= (\varphi+\sigma)(P)+(\varphi+\sigma)(Q),
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi+\sigma)(\lambda P) &= \varphi(\lambda P)+\sigma(\lambda P) \\
&= \lambda\varphi(P)+\lambda\sigma(P) \\
&= \lambda(\varphi+\sigma)(P)
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

であり，線形性を持つし，実数との積 $\lambda\varphi$ も

$$
\begin{aligned}
(\lambda\varphi)(P+Q) &= \lambda\varphi(P+Q) \\
&= \lambda\varphi(P)+\lambda\varphi(Q) \\
&= \lambda\varphi(P+Q),
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda\varphi)(\mu P) &= \lambda\varphi(\mu P) \\
&= \mu\lambda\varphi(P) \\
&= \mu(\lambda\varphi)(P)
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

であり，同じく線形性を持つ．以上の議論は，そもそも，座標 φ の各要素 φ_i（P に対する座標の第 i 番目の成分 x^i を与える：$P \mapsto x^i$）に対して成立するものであった．したがって P の空間（S と書かれたもの）も，すべての φ_i が張る空間（つまり，S から $\mathcal{R}$ への線形写像の全体，これを S^* と書こう）も，どちらも線形性を持つ．

また，座標系を与える線形写像 $\varphi_i \in S^*$

$$
\varphi_i : P \mapsto x^i \tag{2.14}
$$

は，「φ_i という作用が P に対して x^i を対応させる」とみても，「P という "作用" が φ_i に対して x^i を対応させる」，すなわち写像 $P \in S$

$$
P : \varphi_i \mapsto x^i \tag{2.15}
$$

とみても，写像自身は異なるが，内容は同等である．このような S と S^* との対等な関係を双対と呼ぶ．

空間 S, S^* を構成する典型的な方法は，座標の基準を指定することである．例えば，S に対して独立な基準指標（S の基底と呼ばれる）を決めて記号 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$ で表そう．空間は 3 次元なのでお互いに独立な基底はこの 3 個必要である．線形性から S の任意の元は，この 3 つの線形結合で唯一に表される．点 P も同じ空間 S に属することを考慮して $|P\rangle$ と書いて，

$$
|P\rangle = x^1|e_1\rangle + x^2|e_2\rangle + x^3|e_3\rangle \tag{2.16}
$$

とすれば見やすい．$\{x^1, x^2, x^3\}$ $(\in \mathcal{R}^3)$ は座標の値である．空間 S^* も線形性

を持つので，これに対しても基準指標を $\langle e^1|, \langle e^2|, \langle e^3|$ と書こう（S^* の基底）．これらを，最も自然に，

$$\langle e^i|e_j\rangle = \delta^i{}_j \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{for} \quad i=j \\ 0 & \text{for} \quad i \neq j \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

を満たすものとして決めれば，$\langle e^i|$ は式 (2.16) に対して第 i 成分を取り出すという座標関数 φ_i そのものになっている（ここで，$\delta^i{}_k$ はクロネッカーのデルタと呼ばれる）．つまり

$$\langle e^i|P\rangle = x^i \tag{2.18}$$

である．このように見てくると，$|\cdots\rangle$ は通常の縦ベクトル，$\langle\cdots|$ は通常の横ベクトル，と考えても整合的である．この両者を明確に区別するために，添え字 i をそれぞれ下・上に書いている．さらにこの記法によると，式 (2.14), (2.15) で表された双対性が瞭然とする：

$$\langle\varphi^i|P\rangle = x^i, \ \left(P \in S, \varphi^i \in S^*\right). \tag{2.19}$$

式 (2.16) と同様に，S^* の元 P^* は，

$$\langle P^*| = x_1\langle e^1| + x_2\langle e^2| + x_3\langle e^3| \tag{2.20}$$

と一意的に表される．$\{x_1, x_2, x_3\}$ $(\in \mathcal{R}^3)$ は $\langle P^*|$ の座標の値である．

式 (2.18) を式 (2.16) に入れると，$|P\rangle = \sum_{i=1}^3 |e_i\rangle\langle e^i|P\rangle$ が任意の P について成り立つ．つまり $\sum_{i=1}^3 |e_i\rangle\langle e^i|$ という作用は，空間 S の上で結局「何もしない」という操作，つまり結果として「1 をかける」操作に対応する．これを

$$1 = \sum_{i=1}^{3} |e_i\rangle\langle e^i| \tag{2.21}$$

と記そう．これは，$|P\rangle$ を独立な方向（成分）に分解したものの総体であるから，1 の分解と呼んでもいいだろう．

両空間 S, S^* は同じ次元の線形空間なので何らかの対応があるだろう．S から S^* への自然な対応として，まず

$$\langle e^i|\langle e^j| : S \longrightarrow S^* \tag{2.22}$$

が考えられる．$\langle e^i|\langle e^j| = g_{ij}$ とかくと，これは具体的に，成分の対応として，

$$x^i \mapsto x_i \equiv \sum_{j=1}^{3} g_{ij}x^j \tag{2.23}$$

となる．同様に S^* から S への自然な対応として

$$|e_i\rangle|e_j\rangle : S^* \longrightarrow S \tag{2.24}$$

が考えられる．$|e_i\rangle|e_j\rangle = g^{ij}$ とかくと，これは具体的に，

$$x_i \mapsto x^i \equiv \sum_{j=1}^{3} g^{ij} x_j \tag{2.25}$$

となる．式 (2.17) と式 (2.21) を使えば，

$$\sum_{j=1}^{3} g^{ij} g_{jk} = \delta^i{}_k, \quad \sum_{j=1}^{3} g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^k \tag{2.26}$$

となり，上記 g_{ij} と g^{ij} はお互いの逆行列であることがわかる．ここで，$\delta_i{}^k$ もクロネッカーのデルタである．座標系 φ，あるいは同じことだが基底 $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$ に対して，一般の点 $P = \sum_{i=1}^{3} A^i |e_i\rangle$ $(\in S)$ に対応する成分の組 $\{A^i\}_{i=1,2,3}$ を $\vec{A}$ と書こう．上のように S と S^* の自然な対応があるなら，ある 2 つの点 P, Q $(\in S)$ にそれぞれ対応する成分の組 A^i, B^i に対してそれらの関係を特徴付ける数 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ が定義できる：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv \sum_{i=1}^{3} A^i B_i = \sum_{i,j=1}^{3} A^i g_{ij} B^j = \sum_{i,j=1}^{3} A_i g^{ij} B_j. \tag{2.27}$$

ここでもし B^i を特に A^i ととれば，ある $\vec{A}$ に対してそれ自身を特徴付ける数 $\vec{A} \cdot \vec{A}$ が定義できる：

$$\vec{A} \cdot \vec{A} \equiv \sum_{i=1}^{3} A^i A_i. \tag{2.28}$$

さらに $\vec{A} \cdot \vec{A}$ が正なら，数

$$|\vec{A}| \equiv \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \tag{2.29}$$

を，$\vec{A}$ の長さと呼ぼう．そして数 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ を，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の内積と呼ぼう．

実際，もし $g_{ij} = \delta_{ij}$ なら $\langle e_i| = |e_i\rangle$ であり，$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ となる．つまり基底は「正規直交」している．さらに $|\vec{A}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(A^i)^2}$ だから，$|\vec{A}|$ はまさに長さらしく見える．この特別な座標を直交座標系と呼ぼう．一般の座標系の場合は，g_{ij} は縮退していない対称な一般の行列になるし（斜交座標系），もっと一般には場所の関数（空間の上の場）$g_{ij}(\vec{x})$，や時間空間の関数（時空の上の場）$g_{ij}(t, \vec{x})$ にさえなりうる．一般の場合はあとでまとめることにして，この章ではまず簡単な正規直交座標系で考えていこう．なお，この正規直交した場合では S と S^* とを区別する必要はないし，添え字を上下に書き分ける必要もない，が，後の一般化を視野に入れて，一貫して S と S^* とを区別した記法を使っていこう．

問題 1　簡単な 2 次元の場合に斜交座標を考えてみよう．$|e_1\rangle$ と $|e_2\rangle$ から $\langle e^1|$ と $\langle e^2|$ を構成し図示してみよう．

2.2　座標の変換 R

さて，上では座標 φ の局所的な構造を見てきた．前章で議論した相対性原理によると，特別な座標 φ に依存しない形で，物理的実在とそれに対する物理の基礎方程式が存在するはずである．今度は座標変換による座標と座標の関係を見ていこう．写像 φ による座標

$$\varphi : P \mapsto \vec{x} \tag{2.30}$$

と，写像 φ' による座標

$$\varphi' : P \mapsto \vec{x}' \tag{2.31}$$

は，逆 φ^{-1} があれば，合成写像 $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ によって，

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' \tag{2.32}$$

の写像ができる．$\vec{x}'$ が $\vec{x}$ の関数で書かれていれば，微小な $\vec{x}, \vec{x}'$ をそれぞれ $d\vec{x}, d\vec{x}'$ と書き，ライプニッツの規則を用いて，

$$dx'^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{2.33}$$

となる．

この座標の変換において，$\partial x'^i / \partial x^j$ が定数 $a^i{}_j$ とみなせる局所的な領域に限定すれば，もとの記法に戻して，

$$x'^i = \sum_{j=1}^{3} a^i{}_j x^j = a^i{}_j x^j \tag{2.34}$$

となる．ここで，最右辺は和記号を省略した形で書いたが，j に関して和 $\sum_{j=1}^{3}$ をとる．上下に現れた同じ添え字は，S^* の元が S の元に作用して数を作ることを意味する．以降もこのように上下に現れた同じ添え字は常に和をとることと約束して，和記号を省略して書こう．

以上は空間 S に関する議論であったが，それと相対である空間 S^* に関しても同様のことが言える．式 (2.17) から，それぞれの基底がお互いに逆の関係にあるのだから，

$$x'_i = \left(a^{-1}\right)_i^{\ j} x_j \equiv a_i^{\,j} x_j \tag{2.35}$$

である．この最右辺にあるように，逆行列を $a_i^{\,j} \equiv \left(a^{-1}\right)_i^{\ j}$ と記そう．つまり，

$$a^i{}_k a_j^{\,k} = \delta^i{}_j \tag{2.36}$$

である．これは，$\partial x'^i / \partial x^j$ の逆 $\partial x^i / \partial x'^j$ が，定数とみなせる領域で $a_j^{\,i}$ となることと整合する．

視点を変えるという操作は，この座標系を回転することである．とりあえず

初めは正規直交座標系を考えて，座標回転によって物理量がどう変化するかを問題にしよう．視点を変えることによって見え方が具体的にどんな風に変化するのか，その多様性はどのように決定されるのか，これらを定量的に見出していこう．

2.3 回転と反転

上の式 (2.34) で考察した線形変換一般を考える前に，x^3 軸の周りの回転を考えてみよう．これは，x^1, x^2 と x^3 が分離して変換する場合である．ところで，「回転」とはなんだろうか？ とりあえず，回転らしさを列挙してみよう．

1. 2 点間の長さを変えない写像．
2. 変化しない軸がある．
3. 角度 $\theta = 0$ のときは何も変化なし，つまり恒等変換．
4. 角度 θ_1 の回転のあと，角度 θ_2 の回転を引き続き行えば，それは角度 $\theta_1 + \theta_2$ の新たな回転になっている．
5. 角度 θ_1 の回転のあと，角度 θ_1 の逆回転を引き続き行えば，元に戻る．
6. 変換前の点の座標 $\{x^1, x^2, x^3\}$ をそれぞれ実数 λ 倍すると，その変換後の $\{x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}\}$ も λ 倍されている．

特にこの条件 6（線形性）から，この写像は

$$x'^1 = ax^1 + bx^2, \tag{2.37}$$

$$x'^2 = cx^1 + dx^2, \tag{2.38}$$

$$x'^3 = x^3 \tag{2.39}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

の形しかありえない．さらに 1 の条件を例えば，いくつかの簡単な $\{x^1, x^2, x^3\}$ に対して未知数 $a, b, c, d,$ に対する条件が順次決まっていく．ここで，正規直交座標系では，長さは式 (2.29) から

$$\left| \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \right| = \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 \right)^{1/2} \tag{2.41}$$

と自然に決まる．

しかしこれだけからは未知変数が 1 つだけ残る．これは回転の度合を表すパラメターであろう．これを例えば b にとると，$\{a, b, c, d\}$ の可能な形は，

$$\{-\sqrt{1-b^2}, b, -b, -\sqrt{1-b^2}\},\ \{-\sqrt{1-b^2}, b, b, \sqrt{1-b^2}\},$$
$$\{\sqrt{1-b^2}, b, -b, \sqrt{1-b^2}\},\ \{\sqrt{1-b^2}, b, b, -\sqrt{1-b^2}\} \tag{2.42}$$

となる．各係数の実数性から $-1 \leq b \leq 1$ なので，$b = \sin\theta$ と設定できて，$\sqrt{1-b^2} = \cos\theta$ となり，上は，

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R_{(3)}(\theta) \tag{2.43}$$

および，

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

となる．後者は，x 軸を反転する作用を

$$\mathrm{mir} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

と書けば，簡潔に，

$$\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{(3)}(\theta)\,\mathrm{mir} \tag{2.46}$$

と書かれる．この θ は回転角度である．mir は回転らしくないので，$R_{(3)}(\theta)$ だけを回転と呼ぼう．mir は x 軸方向の鏡映を表す変換であり，右手系から左手系に，あるいはその逆に，変換する作用である．

式 (2.43) をもっと簡略に $R^i_{(3)j}$ と書いて，座標変換を

$$x^{i\prime} = \sum_{j=1}^{3} R^i_{(3)j} x^j \tag{2.47}$$

と記そう．和記号 $\sum_{j=1}^{3}$ は以前了解したように，省略してもかまわない．このように，z 軸の周りの角度 θ の回転は，

$$\begin{pmatrix} x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

となる．

同様に，他の軸周りの回転も同様に表示され，まとめると，

$$R^i_{(3)j}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

$$R^i_{(2)j}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

$$R^i_{(1)j}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

となる．上の形から，i, j を入れ替えるとことと，θ を $-\theta$ に変更すること（つまり逆回転操作）は同等であることがわかる．

$$R^i{}_j(\theta)^T R^j{}_k(\theta) = \delta^i{}_k. \tag{2.52}$$

つまり，$R^i{}_j(\theta)$ は直交行列である．

もう 1 つの変換であった（右手系と左手系を入れ替える働きを持つ）mir は，対称な形で，

$$P \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

と同等である．P は空間座標を反転させる変換である：

$$P : x^i \mapsto -x^i. \tag{2.54}$$

これは回転と同等な条件から導かれたのだから，物理量は回転変換だけでなく，この反転 P に対しても系統的な変化（応答）を示すべきであろう．さらに空間だけでなく，時間の反転変換 T も考えられる：

$$T : t \mapsto -t. \tag{2.55}$$

これらは以降，物理量の従う基礎方程式を構成していくときに本質的になる．

さて，以上の回転を組み合わせて，つまり順次操作して，いろいろな回転を作ることができる．例えば，$R_{(1)}(\theta)$ のあとで $R_{(2)}(\varphi)$ を作用させると，

$$\begin{aligned} x'^i &= \sum_{k=1}^{3} R^i_{(2)k}(\varphi) \left(\sum_{j=1}^{3} R^k_{(1)j}(\theta)\, x^j \right) \\ &= R^i_{(2)k}(\varphi)\, R^k_{(1)j}(\theta)\, x^j \end{aligned} \tag{2.56}$$

となる．2 行目では和の記号を省略した．これはもちろん，$R_{(2)}(\varphi)$ のあとで $R_{(1)}(\theta)$ を作用させた

$$x'^i = R^i_{(1)k}(\theta)\, R^k_{(2)j}(\varphi)\, x^j \tag{2.57}$$

とは異なる．それでは逆に，任意の回転を作ることができるだろうか？ どのように構成したらよいだろうか？ これは，座標系を埋め込んだ剛体の配位を決めることと同等である．まず剛体の向きを決めるために角度 2 つが必要となる（緯度と経度）．さらに，その向きの周りの回転角度 1 つを決定すれば配位は確定する．結局 3 つの角度を使えば任意の回転が記述できることになる．これについてはのちほど，スピノルの節であわせて議論しよう．

問題 2　一般の回転は，例えば $R_{(3)}(\psi)\,R_{(1)}(\theta)\,R_{(3)}(\varphi)$ で表される（オイラー角）．

2.4　物理量を表す場の構造

物理量を表す場は，式 (1.26) で与えられる写像であった．まず回転変換を考えているので，ここでは時間は別にして，3 次元空間の中の構造に着目してみよう．つまり，

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{f}{\longrightarrow} & F \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\tilde{\varphi} \\ \mathcal{R}^3 & & X \end{array} \tag{2.58}$$

である．M は 3 次元の空間であり，その要素の点 P は座標 φ によって $\vec{x}\in\mathcal{R}^3$ で表される．物理量 F はやはりその表現 $\tilde{\varphi}$ によって空間 X 上に具体的に表される．座標系 φ によって時空が一意に決まる（つまり φ が 1 対 1 の写像）良い座標系であるとしよう．すると逆写像 φ^{-1} があって，

$$A \equiv \tilde{\varphi} f \varphi^{-1} \tag{2.59}$$

によって，座標 $\vec{x}$ から直接場の値 $A(\vec{x})$ $(\in X)$ が表せる：

$$A : \vec{x} \mapsto A(\vec{x})\,. \tag{2.60}$$

場は，しばしばこのように $A(\vec{x})$ と省略して記される．ここで $A(\vec{x})$ というのは場の値であるが，関数そのもの，A，の意味で用いられたりする．しかしどんな場合でも，その実体は式 (2.58) で与えられる写像である．

さて，物理的実在は見え方によらない，という立場から，上の回転変換 (2.48) を考えてみよう．見え方が変わるだけで，物理的実在物はいつも一貫して不変である：

$$f : P \mapsto f(P)\,. \tag{2.61}$$

回転の変換 R に対して，座標系を表す写像は

$$R : \varphi \mapsto \varphi' \tag{2.62}$$

と変換する．回転変換された対象物をすべてプライム ($'$) をつけて表そう．これに付随して，数値 $\vec{x} = \varphi(P)$ は $\vec{x}' = \varphi'(P)$ に，つまり

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' \tag{2.63}$$

と変換する．さらに場も，一般に R に付随して見え方を変える：

$$\tilde{R} : \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}'. \tag{2.64}$$

これに付随して，場の値 $A = \tilde{\varphi} f \varphi^{-1}$ は $A' = \tilde{\varphi}' f \varphi'^{-1}$ に，つまり

$$A \mapsto A' \tag{2.65}$$

と変換する．これらの事情は式 (1.34) にまとめられる．座標の変換を表す式 (2.63) と，それに付随した場の見え方の変化を表す式 (2.65) をあわせて，結局場は回転 R に付随して

$$A(\vec{x}) \mapsto A'(\vec{x}') \tag{2.66}$$

と変換することになる．変換する前の量たち $\vec{x}, A$ から変換したあとの量たち $\vec{x}', A'$ への写像になっている．さまざまな見え方の変化 (2.65) が可能であるが，それが系統的であるかどうかで，物理的実在か否かが決まる．そして，多様な系統性が，物理的実在の多様性を与える．

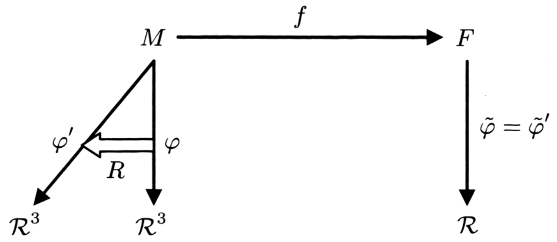
最も簡単に, 見え方が全く変わらないなものを考えてみよう．つまり, 式 (2.66) が恒等変換（この式の $\mapsto$ が $=$）であるということであり,

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}'\left(f\left(\varphi'^{-1}(\vec{x}')\right)\right) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(f\left(\varphi^{-1}(\vec{x})\right)\right) \tag{2.67}$$

あるいは,

$$A'(\vec{x}') = A(\vec{x}) \tag{2.68}$$

である．式 (1.34) にある空間 X としてはとりあえず，最も簡単に実数，$\mathcal{R}$ とれば十分であろう．ところで我々は初め回転を「2 点間の距離が不変」であると定義して出発した．したがって，定点 P_0 からの距離 $f(P)$ はもともとこの形態の物理的実在である．距離に限らず，回転変換に対して不変であるものは実在の 1 つの形態である．この物理的実在の形態を我々はスカラー場と呼ぼう．スカラー場全体の写像を描くと，式 (1.34) の特別な形



(2.69)

となる．回転変換 R に対して，座標系 φ は φ' に変換されるが，物理量 F の見

え方 $\tilde{\varphi}$ は不変である：$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$．初めに述べた簡単な例を思い起こそう．球をどんな方向から見ても（つまりどのように回転させても）円に見える．つまり見え方は不変である．スカラー場はこれの類似物である．

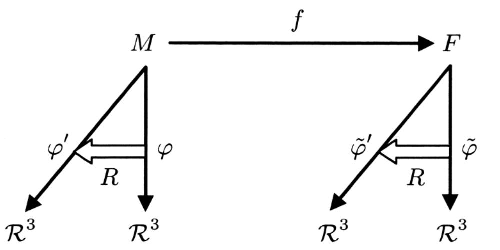
また，物理量の系統的な変換として，空間 M の点 P と同様の見え方をする場合が考えられる．つまり，回転に対して系統的に (2.48) に従って変換する物理量の形態である．つまり，式 (2.65) が回転 R によって引き起こされるということであり，

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}'\left(f\left(\varphi'^{-1}\left(\vec{x}'\right)\right)\right) = R\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\vec{x}\right)\right)\right) \tag{2.70}$$

あるいは，

$$A'\left(\vec{x}'\right) = RA\left(\vec{x}\right) \tag{2.71}$$

である．φ の変換と $\tilde{\varphi}$ の変換が同じなので，その表現空間 X も $\mathcal{R}^3$ ととればいいだろう．このような見え方をする物理的実在の形態を反変ベクトル場と呼ぼう．反変ベクトル場全体の写像を描くと

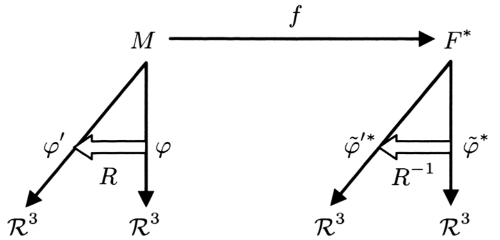


(2.72)

となる．回転変換 R に対して，座標系 φ は φ' に変換され，全く同様に物理量 F の見え方 $\tilde{\varphi}$ は R によって $\tilde{\varphi}'$ に変換するのである：$\tilde{R} = R$．表現空間 X が $\mathcal{R}^3$ であることを強調して，式 (2.71) を

$$A'^i\left(\vec{x}'\right) = R^i{}_j A^j\left(\vec{x}\right) \tag{2.73}$$

と書くと内容がよくわかる．もちろん，M 自身も，同じ見え方をするのだからベクトル場である．同様に，これに双対な見え方も系統的である．つまり，



(2.74)

であり，簡潔に内容がわかるように書くと

$$A'_i\left(\vec{x}'\right) = R_i{}^j A_j\left(\vec{x}\right) \tag{2.75}$$

となる．このような見え方をする物理的実在の形態を共変ベクトル場と呼ぼう．

先の式 (2.36), (2.52) と同じように $R^i{}_k R_j{}^k = \delta^i{}_j$ であるから，$\tilde{R} = R^{-1}$ である．反変ベクトル場，共変ベクトル場をあわせてベクトル場と呼ぼう．

初めに述べた簡単な例を思い起こすと，ベクトルは鉛筆のような存在である．回転させると長くなったり短くなったりして見える．このように鉛筆は特有の系統的な見え方をする．もっと視覚的に見ると，大きさと方向を持ったものと捉えることもできるだろう．ベクトル場はこれの類似物である．

以上の考察は，一般の場を想定して式 (1.26) で表される写像を対象にしている．しかし，局在した粒子の位置を式 (1.12) にあるような写像で記述するとき，やはり座標写像 φ を核にできているのだから，$\tilde{\varphi}$ を φ そのものと考えれば，粒子の位置に対しても上の議論は成立する．

問題 3 スカラー場を表現する空間 X は実数体 $\mathcal{R}$ だけでなく，他にいろいろな場合がありうる．例えば $\mathcal{R}^3$，複素数 $\mathcal{C}$，整数 $\mathcal{Z}$ など．

2.5 テンソル族

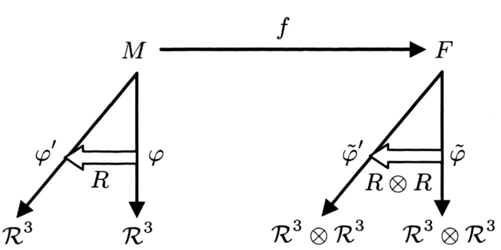
物理的実在の形態はスカラー場とベクトル場という種族だけではない．回転に対して系統的な見え方をするものをさらに探してみよう．素直に考えると，ベクトル場を複数組み合わせて，系統的に振る舞う量を多様に作っていくことができるだろう．例えば，ベクトル $A(\vec{x}), B(\vec{x})$ に対して，それらの積 $A^i(\vec{x})\, B^j(\vec{x})$ のように振る舞う量を考えることができる：

$$A'^k(\vec{x}')\, B'^l(\vec{x}) = R^k{}_i R^l{}_j A^i(\vec{x})\, B^j(\vec{x}). \tag{2.76}$$

あるいは，これを一般化した量を $A^{ij}(\vec{x})$ と書いて，

$$A'^{kl}(\vec{x}') = R^k{}_i R^l{}_j A^{ij}(\vec{x}) \tag{2.77}$$

とすることもできる．これは回転変換 R の単純な（線形性を保持した）重ねあわせだが，確かに系統的な変換になっている．場全体を書くと



(2.78)

となる．式 (2.77) に現れる回転変換 2 つの重ねあわせ $R^k{}_i R^l{}_j$ を $R \otimes R$ と書いている．また A^{ij} たちの空間 X は $3 \times 3 = 9$ 個の実数の組であり，これを $\mathcal{R}^3 \otimes \mathcal{R}^3$ と書いている．これを $V = \mathcal{R}^3$ として $V \otimes V$ と略記すると簡便だ．$A^i(\vec{x})\, B^j(\vec{x})$ と同じように振る舞う物理的実在の形態を 2 階の反変テンソル場

と言う．このように構成したテンソル場が有用なのは，それが線形性を持っていて，加法や実数との乗法ができるからである．これは次節で議論しよう．新しい量の構成はこれにとどまらない．

さらに，$A^i(\vec{x})\,B_j(\vec{x})$ のように振る舞う量を考えることができる．つまり，

$$A'^k(\vec{x}')\,B'_l(\vec{x}') = R^k{}_i R_l{}^j A^i(\vec{x})\,B_j(\vec{x}) \tag{2.79}$$

あるいは，もっと一般に $A^i{}_j(\vec{x})$ という量に対して

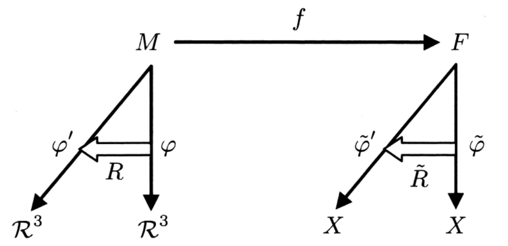
$$A'^k{}_l(\vec{x}') = R^k{}_i R_l{}^j A^i{}_j(\vec{x}) \tag{2.80}$$

である．$A(\vec{x})\,B^*(\vec{x})$ と同じように振る舞う物理的実在の形態を 1 階反変 1 階共変の混合テンソル場と言い，それらの作る空間を $V \otimes V^*$ と書こう．

同様に進めば，$X = \bigotimes_n V \otimes \bigotimes_m V^*$ とした n 階反変 m 階共変の混合テンソル場 $A^{i_1 i_2 \cdots i_n}{}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ を作ることができる $(m, n = 0, 1, 2 \cdots)$．それを定義する変換性は

$$A'^{k_1 k_2 \cdots k_n}{}_{l_1 l_2 \cdots l_m}(\vec{x}') = R^{k_1}{}_{i_1} R^{k_2}{}_{i_2} \cdots R^{k_n}{}_{i_n} R_{l_1}{}^{j_1} R_{l_2}{}^{j_2} \cdots R_{l_m}{}^{j_m} A^{i_1 i_2 \cdots i_n}{}_{j_1 j_2 \cdots j_m}(\vec{x}) \tag{2.81}$$

である．このような物理的実在の種族は (n, m) 階のテンソル場，とも呼ばれる．記法の簡便のために，$A^{k_1 k_2 \cdots k_n}{}_{l_1 l_2 \cdots l_m}(\vec{x}')$ を $A^{k_1 k_2 \cdots k_n}{}_{l_1 l_2 \cdots l_m}$ と書いたり，さらに添え字もはずして A と書いたりする場合があるが，その実体はいつも，写像



(2.82)

である．

反変・共変ベクトル場はそれぞれ，$(1,0)$ 階テンソル場，$(0,1)$ 階テンソル場である．スカラー場は $(0,0)$ 階のテンソル場である（簡単に，0 階のテンソル場）．これらはさらに高階のテンソル場とあわせてテンソル族を形成する．これらは物理的実在としての物理量が存在したとすれば持つべき振舞いである．ただし，系統的に振る舞う量がこれらで尽きる保証はないし，他にもあるかもしれない．このことはのちに議論しよう．

問題 4　視点を変える操作は空間の回転だけではないだろう．どのような変換が考えられるか？

問題 5　ベクトルは「向きと大きさを持った量」とも考えられる．

問題 6　ベクトルは 3 つのスカラーの寄せ集めではない．

問題 7　2 階のテンソルは 3 つのベクトルの寄せ集めではない．

2.6 テンソルの演算

物理量を表す場の量に対して，その和が必要な場合がよくある．その物理量が示強性の量なら和をとることに意味はないが，示量性の量なら和が意味を持つ．例えば，示強的なスカラー場である温度の和をとることに意味はないが，示量的なベクトル場である力は和をとって全体の力，合力となる．物理量であるテンソル場に対しては，和をとったものも物理量，つまりテンソル場でなければならない．このように，和をとる操作はテンソル性を壊してはならない．そのために，この和をとる操作は，回転変換 (2.66) と，操作の順番を入れ替えても結果は同等でなければならない．上に議論したような一般テンソル場の構成手続きの利点は，このような線形性がすでに保障されている点である．

0 階のテンソル場，つまりスカラー場 A に関しては

$$A_{(1)}(\vec{x}) + A_{(2)}(\vec{x}) = A_{(3)}(\vec{x}) \tag{2.83}$$

のように，2 つのスカラー場 $A_{(1)}$ および $A_{(2)}$ から，第 3 のスカラー場 $A_{(3)}$ を作る．$A_{(1)}$ も $A_{(2)}$ も回転に対して不変なのだから，もしこの加法 $+$ が実数に対する加法そのものなら，$A_{(3)}$ もそうでありスカラー場になる．だから加法はそう決めよう．

反変ベクトル場 A に関しては，同様に

$$A_{(1)}(\vec{x}) + A_{(2)}(\vec{x}) = A_{(3)}(\vec{x}) \tag{2.84}$$

として，2 つのベクトル場 $A_{(1)}$ および $A_{(2)}$ から，第 3 のベクトル場 $A_{(3)}$ を作りたい．最も素直に，各成分を実数の意味で加えてみよう．つまり，各 $i = 1,2,3$ に対して，

$$A^i_{(1)}(\vec{x}) + A^i_{(2)}(\vec{x}) = A^i_{(3)}(\vec{x}) \tag{2.85}$$

と意味づけするのである．すると，

$$\begin{aligned} A'^i_{(3)} = A'^i_{(1)} + A'^i_{(2)} &= \sum_{j=1}^{3} R^i_j A^j_{(1)} + \sum_{j=1}^{3} R^i_j A^j_{(2)} = \sum_{j=1}^{3} R^i_j \left(A^j_{(1)} + A^j_{(2)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} R^i_j A^j_{(3)} \end{aligned} \tag{2.86}$$

なので，$A_{(3)}(\vec{x})$ はベクトル場である．共変ベクトル場についても同様である．

一般のテンソルに対しての和

$$T_{(1)} + T_{(2)} = T_{(3)} \tag{2.87}$$

も同様に，各 $i, j, k, \cdots, l, m, n \cdots = 1, 2, 3$ に対して，

$$T^{ijk\cdots}_{(1)lmn\cdots}(\vec{x}) + T^{ijk\cdots}_{(2)lmn\cdots}(\vec{x}) = T^{ijk\cdots}_{(3)lmn\cdots}(\vec{x}) \tag{2.88}$$

と定めると，$T_{(3)}$ はテンソルになる．ただし，階数の異なるテンソルどうしの

和は，自然に定義できないし，もはやテンソルではない．

一方，テンソルとテンソルの積も自然に構成できる．上述の $\otimes$ と同様に構成しよう．

$$T_{(1)lmn\cdots}^{ijk\cdots}(\vec{x}) \otimes T_{(2)stu\cdots}^{pqr\cdots}(\vec{x}) = T_{(1)lmn\cdots}^{ijk\cdots}(\vec{x})\, T_{(2)stu\cdots}^{pqr\cdots}(\vec{x}). \tag{2.89}$$

(m,n) 階のテンソルと (p,q) 階のテンソルから $(m+p, n+q)$ 階のテンソルが構成されるのは明らかだろう．

問題 8 一般にベクトルはベクトルで割れない．商として 2 階のテンソルを許すとどうか？ 積としてベクトル積を考えた場合は？

問題 9 一般にテンソルはテンソルで割れない．商として高階のテンソルを許すとどうか？

2.7 不変テンソル場

スカラー場は回転によってその値を変えなかった．スカラー場はすべて不変である．しかし不変なベクトル場は，すべての成分が零である零ベクトル場を除いて，存在しない．

2 階のテンソル場を考えると，$\vec{x}$ に依存しない特別なテンソル場 $\delta^i{}_j$（クロネッカーのデルタと同じ）

$$\delta^i{}_j \equiv \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{for} & i = j \\ 0 & \text{for} & i \neq j \end{array} \right\} \tag{2.90}$$

は，式 (2.52) でわかるとおり回転によって形を変えない：

$$\delta'^i_j = R^i{}_k R_j^l \delta^k_l = \delta^i{}_j. \tag{2.91}$$

さらに反転 P に関しても形を変えない．

3 階のテンソルでは，$\vec{x}$ に依存しない特別なテンソル場 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{for} & \{ijk\} \text{ が } \{123\} \text{ の遇置換} \\ -1 & \text{for} & \{ijk\} \text{ が } \{123\} \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{for} & \text{上記どれでもない} \end{array} \right\} \tag{2.92}$$

があって，完全反対称[*1]であり，やはり回転 $(\det R = 1)$ によって形を変えない．

$$\varepsilon'_{ijk} = R^l{}_i R^m{}_j R^n{}_k \varepsilon_{lmn} = (\det R)\, \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \tag{2.93}$$

しかし，反転 P に対してはその符号を変える．

$$\varepsilon'_{ijk} = P^l{}_i P^m_j P^n_k \varepsilon_{lmn} = (\det P)\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}. \tag{2.94}$$

これらの不変テンソル場は特別な意味を持っている．例えば，ベクトル場 A^i

[*1] 任意の添字のペアの取り替えによって符号が変わる性質．

とその双対 A_i に対して，$A^j\delta^i{}_j A_i$ を作れば，これは A^i のノルムであり，スカラー量が構成される．これはいままでいろいろな場面で使ってきたことであるが，この操作を縮約と呼ぼう．また（縮約を複数使って），$\tilde{A}_n \equiv A^l A^m \varepsilon_{lmn}$ を作れば，これはベクトル場である．$\tilde{A}_{mn} \equiv A^l \varepsilon_{lmn}$ を作れば，これは 2 階の反対称テンソル場である．つまり階数の異なるテンソル場を作ることができる．特に ε_{lmn} を奇数個含んで作られた量は，反転に対して符号を変える．

問題 10　その他の不変テンソル場はあるだろうか．高階の不変テンソル場はどうなるだろうか．

2.8　テンソル族の系譜

1 階のテンソル場であるベクトル場 A, B から，不変テンソル $\delta^i{}_j$ を用いて 0 階のテンソル場であるスカラー場を作ることができる．つまり，

$$X \equiv \delta^i{}_j A_i B^j \tag{2.95}$$

を考えると，$X' = \delta'^i_j A'_i B'^j$ であるから，不変性 $\delta'^i_j = \delta^i{}_j$ を用いて，

$$X' = \delta^i{}_j A'_i B'^j = \delta^i{}_j R^j{}_m R_i{}^l A_l B^m = \delta^l{}_m A_l B^m = X \tag{2.96}$$

なので，X はスカラー場である．これは以前，2 つのクトル場 A, B の内積と呼んだもので，$A \cdot B$ と記される．幾何学的には，これは $\vec{A}$ を $\vec{B}$ 方向へ（あるいは $\vec{B}$ を $\vec{A}$ 方向へ）射影した大きさに比例する．つまり，両ベクトル場のなす角度を θ として，

$$X = |A|\,|B| \cos\theta. \tag{2.97}$$

このように一般に高階のテンソル場は低階のテンソル場を含んでいる．

2 階のテンソル場の場合をみてみよう．2 階のテンソル場 T は，不変テンソル $\delta^i{}_j$ を用いて，

$$tr\,(T) \equiv T^j_i \delta^i{}_j = T^i_i \tag{2.98}$$

というスカラー場を作れる．2 階のテンソル場 T を行列とみなしたとき，これは T のトレース（対角和）である．同様に

$$tr\left(T^2\right) \equiv T^j_i \delta^i{}_k T^k_l \delta^l{}_j = T^j_k T^k_j, \tag{2.99}$$

$$tr\left(T^3\right) \equiv T^j_i \delta^i{}_k T^k_l \delta^l{}_m T^m_n \delta^n{}_j = T^j_k T^k{}_m T^m{}_j, \tag{2.100}$$

$$\cdots$$

のようにいくらでもスカラーが作れそうだ．しかし T の成分の数が有限だし，Cayley–Hamilton の定理から，独立なものは $tr\,(T), tr\left(T^2\right)$ までであることがわかる．実際，Cayley–Hamilton の定理は，T の固有多項式

$$f_T(x) \equiv \det(xI - T) \tag{2.101}$$

に対して $f_T(T) = 0$ を言う．f は高々 3 次式なので T^3 は T^2, T, I の線形結合でかける．このトレース（対角和）を取れば $tr(T^3)$ 以上は $tr(T^2)$ 以下のもので書けることがわかる．またさらに，不変テンソル場 ε_{ijk} を用いて作られるスカラー場は

$$\det(T) \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T^{il}T^{jm}T^{kn} = \varepsilon_{lmn}T^{1l}T^{2m}T^{3n} \tag{2.102}$$

がある．したがって，独立なスカラー場は

$$tr(T),\ tr\left(T^2\right),\ \det(T) \tag{2.103}$$

の 3 個だけである（演習問題）．これらは (2.101) の係数をなし，その根である固有値と同等である．したがって，固有値はスカラー場である．

さらに，2 階のテンソル場 T は，不変テンソル場 ε_{ijk} を用いて，

$$\tilde{T}_k \equiv T^{ij}\varepsilon_{ijk} \tag{2.104}$$

というベクトル場を作れる．ただし，T_{ij} を対称部分と反対称部分に分けた

$$T^{ij} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right) \tag{2.105}$$

とき，$\tilde{T}_k$ には，対称成分 $\left(T^{ij} + T^{ji}\right)/2$ は寄与せず，反対称成分 $\left(T^{ij} - T^{ji}\right)/2$ だけ寄与する．後者の成分は 3 個であり，$\tilde{T}_k$ の成分の数と同じである．実際，

$$\frac{\left(T^{ij} - T^{ji}\right)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{T}_3 & -\tilde{T}_2 \\ -\tilde{T}_3 & 0 & \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 & -\tilde{T}_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.106}$$

であり，ベクトル場 (2.104) と 2 階テンソル場の反対称成分 (2.106) の間には 1 対 1 の対応関係がある．

1 階のテンソル場（真のベクトル場）である A^i と，ここの 2 階のテンソル場由来のベクトル場 $\tilde{T}_k$ は，回転に対する変換性は全く同じだが後者は ε_{ijk} を 1 つ含むので空間反転 P に際して符号を変えない，という点で前者と異なる．この P に対する変換性の違いから，後者を擬ベクトル場と呼んで区別しよう．それぞれ，極性ベクトル場，軸性ベクトル場と命名して区別することもある．どちらも変換性の明確な物理量である．

特別な場合として，2 階のテンソル場 T が 2 個のベクトル場 $\vec{u}, \vec{v}$ でできている場合 $T^{ij} = u^i v^j$ を考えよう．不変テンソル場 ε_{ijk} を用いると，1 つのベクトル場

$$a_k \equiv \varepsilon_{ijk}T^{ij} = \varepsilon_{ijk}u^i v^j \tag{2.107}$$

ができる．これは 2 個のベクトル u, v から作られる外積として，しばしば

$$\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v} \tag{2.108}$$

と書かれる．

幾何学的には，$\vec{a}$ は $\vec{u}$ および $\vec{v}$ と垂直であること ($\vec{a}\cdot\vec{u}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{v}=0$) はすぐわかる．さらに，規格直交座標を使っているので $\varepsilon^{ijk}=g^{il}g^{jm}g^{kn}\varepsilon_{lmn}=\varepsilon_{ijk}$ だから

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{klm}=\delta^i{}_l\delta^j{}_m-\delta^i{}_m\delta^j{}_l \tag{2.109}$$

を用いると[*2]，$\vec{u},\vec{v}$ のなす角度を θ として，その大きさが

$$|\vec{a}|=\sin\theta\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \tag{2.110}$$

となることもわかる．

問題 11　上の式で $|\vec{u}|\ll|\vec{v}|$ であるとしよう．このとき，$\vec{v}+\vec{a}$ はベクトル $\vec{v}$ を，$\vec{u}$ の方向を軸として角度 $|\vec{u}|$ だけ回転したベクトルである．

問題 12　$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$. したがってベクトル積は分配側を満たさない．

さらに，もう 1 つのベクトル場 w を持ち込めば，1 つのスカラー場

$$V\equiv\varepsilon_{ijk}u^iv^jw^k \tag{2.111}$$

ができる．

幾何学的には，この V は，u,v が作る平行四辺形を底面とし，さらに w と a が作る角度 ϕ だけ傾いだ立体の体積である．

$$V=|a|\,|w|\cos\phi=\cos\theta\cos\phi\,|u|\,|v|\,|w|\,. \tag{2.112}$$

問題 13　V は $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ と (非対称な形に) 書けるが，$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ である．

回転を表す作用 $R^i{}_j$ によってベクトル場 A^i は

$$A'^i=R^i{}_jA^j \tag{2.113}$$

と変換される．これにさらに回転 $S^i{}_j$ を施してみる．

$$\begin{aligned}A''^i&=S^i{}_jA'^j=S^i{}_jR^j{}_kA^k\\&=S^i{}_jR^j{}_k\left(S^{-1}\right)^k{}_lS^l{}_mA^m\\&=\left(S^i{}_jR^j{}_k\left(S^{-1}\right)^k{}_l\right)S^l{}_mA^m\\&\equiv R'^i{}_lS^l{}_mA^m\end{aligned} \tag{2.114}$$

となる．つまり写像の図式は

[*2] 問題 20 参照．

$$
\begin{array}{ccc}
A' & \overset{\mathrm{R}}{\longleftarrow} & A \\
S\downarrow & & S\downarrow \\
A'' & \longleftarrow & SA \\
 & R' = SRS^{-1} &
\end{array}
\tag{2.115}
$$

となる．${S^i}_j$ によって回転された座標系では，回転操作 ${R^i}_j$ は，回転 s に対する式 (2.52) から，

$$
\begin{aligned}
{R'^i}_l &= {S^i}_j {R^j}_k \left(S^{-1}\right)^k{}_l \\
&= {S^i}_j {S_l}^k {R^j}_k
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

の形を持つことになる．回転 ${S^i}_j$ に対するこの変換の形から，回転操作を表す ${R^i}_j$ はそれ自身 2 階の $(1,1)$ テンソル場であることがわかる．

問題 14　(m,n) 階のテンソル $T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ は m 個の共変ベクトルと n 個の反変ベクトルからスカラーを作る写像でもある．これはどの変数ベクトルに対しても線形である．

2.9　粒子と場—物理の法則

今まで物理的実在の典型的な存在様式としてテンソル場を考えてきた．その実在物がダイナミクスを持って時間的に変化するさまを記述するのが物理法則である．ここでは，物理的実在であるテンソル場の変換性，つまり見え方の規則性がどのように物理法則を規定していくのか，その基本を見ていこう．具体的な詳細は次章以降で展開しよう．

テンソル場と呼んでいる物理的実在は一般に時間空間に広がった場である．では，少なくとも空間的には局在していると考えられる粒子は場ではないのだろうか？ 相互作用を近接作用とみなしてすべて場で記述するという我々の立場から，粒子と場をつなぐ関係を考察しておこう．

直感的には，粒子は場が局在した極限である．まず 1 次元の場合を考えよう．ある点 x_0 で最大値を持つ関数

$$
\delta_\varepsilon\left(x - x_0\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\left(x - x_0\right)^2 + \varepsilon^2}
\tag{2.117}
$$

を考えよう．ここに，1 つのパラメター ε (>0) が入っていて，最大値付近の様子は，ε が小さくなるに従ってどんどん鋭くなり，$\varepsilon \to +0$ の極限で完全にそそり立つ．それにもかかわらず，どの ε に対しても

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon\left(x - x_0\right) dx = 1
\tag{2.118}
$$

となる．つまり，任意の関数は $\delta_\varepsilon\left(x - x_0\right)$ をかけて積分することによって，点 x_0 近傍以外の値がすべて寄与しなくなる．そして極限 $\varepsilon \to +0$ をとると，点

x_0 での値だけがそのまま取り出され，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon\left(x-x_0\right)f\left(x\right)dx=f\left(x_0\right) \tag{2.119}$$

となる．この式を象徴的に

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(x-x_0\right)f\left(x\right)dx=f\left(x_0\right) \tag{2.120}$$

とかく．$\delta\left(x\right)$ は式 (2.119) を意味する象徴である．したがって関数の極限ではなく，フィルター関数列を使った局在操作の極限を意味する．この極限操作はディラックの超関数と呼ばれる．超関数の微分 $\delta'\left(x\right)$ は，部分積分の極限 $\varepsilon\to+0$ を用いて定義される：

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'_\varepsilon\left(x-x_0\right)f\left(x\right)dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\delta_\varepsilon\left(x-x_0\right)f\left(x\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon\left(x-x_0\right)f'\left(x\right)dx\\
&=-f'\left(x_0\right).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

デルタ関数は遠方でいくらでも急減少するので上式の境界値は効かないのである．ちなみに，フィルター関数は式 (2.117) の関数系列に限らず，フィルターが同じように有効なさまざまな関数系列がありうる．式 (2.120) を 3 次元に拡張したものを $\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)\left(=\delta\left(x^1-x_0^1\right)\delta\left(x^2-x_0^2\right)\delta\left(x^3-x_0^3\right)\right)$ と書き，3 次元空間の中でフィルター作用をする：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)f\left(\vec{x}\right)dx^1dx^2dx^3=f\left(\vec{x}_0\right). \tag{2.122}$$

問題 15　フィルター関数は式 (2.117) 以外にどんなものが考えられるだろうか？

問題 16　デルタ関数 $\delta\left(x-x_0\right)$ を積分すると階段関数 $\theta\left(x-x_0\right)=\{0 \text{ for } x<x_0,\ 1/2 \text{ for } x=x_0,\ 1 \text{ for } x>x_0\}$ となる．これはヘビサイドの超関数と呼ばれる．

問題 17　$f\left(x_0\right)=0,\ f'\left(x_0\right)\neq0$ となる関数 $f\left(x\right)$ に対して，$\delta\left(f\left(x-x_0\right)\right)=\left|f'\left(x_0\right)\right|^{-1}\delta\left(x-x_0\right)$ となる．

粒子と場を結びつけるディラックのデルタ関数 $\delta^{(3)}$ を用いて，粒子を表現する場が考えられる．時刻 t において点 P に局在する粒子の位置座標を $\vec{z}(t)$ として，この粒子の軌跡を表す場 $f\left(t,\vec{x}\right)$ は

$$f\left(t,\vec{x}\right)=\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}\left(t\right)\right) \tag{2.123}$$

と表せるだろう．軌跡だけでなく，荷電 e を持つ粒子であれば，この荷電粒子が作る電荷密度場 $\rho\left(t,\vec{x}\right)$ は，

$$\rho\left(t,\vec{x}\right)=e\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}\left(t\right)\right) \tag{2.124}$$

と書ける．これは電荷の存在領域を含んで体積積分すると不変な全電荷 e となる．体積はスカラー量であったからこの電荷密度もスカラー場である．

今まで粒子は式 (1.12) に従ってラグランジュ的に，場は式 (1.26) に従ってオイラー的に記述されてきた．実際問題としては，電荷と電磁場のように，古典的粒子と場は共存して相互作用している場合が多い．デルタ関数によってこの場合でも場の一元論が，一応，可能になる．以下，局在する粒子であっても，場として捉えられることを念頭において，粒子の描像を使っていこう．

物理法則はたいてい時間発展方程式として，着目する物理量に対する微分方程式として表される．時間発展する量の変化は，それを促す源の作用を表す量で書ける．つまり，変化は作用による．作用が原因を与え，結果として変化する，という因果関係の構図は自然界の一般的原理であり，因果律と呼ばれている．物理学の基礎を与える法則は，特に明快な因果律を反映しているので美しい．

作用を表す量も，もちろん物理的実在である．物理的実在はテンソル量で書けていた．したがって，物理法則はテンソル量に対する方程式である[*3]．例えば，質量 m の質点の運動はニュートンの運動方程式（後述）で記述され，

$$m\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} = F^i \tag{2.125}$$

と表される．左辺は定数 m がかかっているが速度の時間変化であり，それを引き起こすのが右辺にある量で，それは力と呼ばれる．これがニュートンの因果律である．もっと正確には，左辺は空間的に局在した粒子の，時刻 t における座標の値 $x^i(t)$ の t に関する 2 階微分であり，これを引き起こすのが右辺にある量，力である．これは時刻 t に空間座標値 $x^i(t)$ に存在する粒子に時々刻々作用する，やはり空間的に局在した量である．上の位置座標 x^i は 1 階のテンソル量，したがってベクトル量であった．これは場ではなく局在した量ではあるが，座標変換に対してベクトルとして振る舞う．その時間微分である速度 $\dot{x}^i$ や加速度 $\ddot{x}^i$ も，時間座標は今のところ回転に関係ないので，ベクトルである．上式の左辺は定数 m に加速度 $\ddot{x}^i$ がかかっているので全体としてベクトル量である．したがってもし，この方程式で記述される現象が実在なら，右辺の力 F_i も同じ種類のテンソル，つまりベクトル量であるべきである．あるいは，上式を

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} - F^i = 0 \tag{2.126}$$

と書こう．F^i がベクトル量でなければ，テンソル方程式にならないから，これは物理法則とはなりえない．力 F^i はベクトル量であるべきだ．現実問題として力がどのようなものかは初めからわかっているわけではない．むしろどのような力が働いているのかを実験や理論的考察から見出す膨大な作業が必要になる．F^i がベクトル量であるという規定が，この作業を大幅に助けてくれる．こ

[*3] 一般に，方程式が系統的な見え方をすることを共変性という．物理的意味を持つために本質的な条件である．

れがベクトル・テンソル解析の有効性の１つである．のちに，この簡単な例を見ていこう．

問題 18　3 階テンソル，4 階テンソルの物理量にはどんなものが考えられるだろうか．

2.10 スピノル—もう１つの実在

いままでさまざまな物理的実在物（＝物理量）を，回転変換に対するテンソル場として捉えてきた．物理量の存在形態はテンソル場だけなのだろうか？ テンソル場を実在とみなせるのは，回転操作に対して系統的に変化する自己同一性を持った量であるからであった．この「系統的に変化する」多様性はもう他にないのだろうか？

少し前には力学の本は四元数を用いて記述されていた[*4]．つまり，空間座標 (x, y, z) で表される位置は，一般化された虚数単位 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ を用いて，$w = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ と書かれる．ここで，虚数単位たちは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \\ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{2.127}$$

という規則を持った数である．これらから，それぞれが反交換すること，$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$ や，$\boldsymbol{ijk} = -1$ などがわかる．これは複素数の拡張であるが，交換則は成立しない．結合則は成立する．

複素数の虚数単位 i は $i^2 = -1$ で定義された．この性質は，i を実 2 行 2 列の行列として表して，

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.128}$$

として実現できる．同様に，式 (2.127) に対しても，複素 2 行 2 列の行列として実現できる．例えば，標準的なパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

を使うと，

$$\boldsymbol{i} \leftrightarrow i\sigma_1, \quad \boldsymbol{j} \leftrightarrow i\sigma_2, \quad \boldsymbol{k} \leftrightarrow -i\sigma_3, \tag{2.130}$$

という形で，反交換性も含めて実現できる．パウリ行列を使えば，空間座標 (x, y, z) はまとめて

$$\vec{x} \leftrightarrow w \equiv \sigma_i x^i = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

[*4] 「天体力学講義」堀源一郎著，東京大学出版会（1988）．

と表される．パウリ行列σ_iがそうなのでwもエルミート（つまり$w^\dagger = w$）であり，$\det w = -\left(x^2+y^2+z^2\right)$となる．行列としての足をあらわに書けば$\sigma$は$\sigma_{ib}^a$であり，これは3次元実空間$(1 \le i \le 3)$と2次元複素空間(足$1 \le a, b \le 2$)を結ぶ．

wを回転させる変換

$$w \equiv \sigma_i x^i \mapsto w' \equiv \sigma_i x'^i \tag{2.132}$$

を考えよう．この変換は，回転後の表式が式(2.131)のように書ききれるために，wのエルミート性を壊してはいけないし，トレースが0であるという性質も壊してはいけない．また，回転であるために，この変換は長さ$-\det w$を変えてはいけない．このような変換は2×2ユニタリー行列Sを用いて，

$$w' = SwS^{-1} \tag{2.133}$$

と書ける$(S^{-1} = S^\dagger)$．Sを

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{2.134}$$

と書くと，その条件は

$$\alpha^* = \delta, \quad \gamma^* = -\beta, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2.135}$$

となり，結局実数パラメーター3個が残る．具体的には，

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\theta_2}\cos\theta_1 & ie^{i\theta_3}\sin\theta_1 \\ ie^{-i\theta_3}\sin\theta_1 & e^{-i\theta_2}\cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{2.136}$$

のように書くことができる．これが回転変換を表すのであればパラメーター$\theta_1, \theta_2, \theta_3$はどのように回転角に結びついているのだろうか？ そしてベクトルの回転を表す3×3実直交行列Rとの関連はどうなっているのだろうか？ 簡単なベクトルに対して式(2.133), (2.136)を試してみると，むしろ以下のパラメーターの取り方のほうが自然であることがわかる．

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_2+\phi_3}{2}}\cos\frac{\phi_1}{2} & ie^{i\frac{\phi_2-\phi_3}{2}}\sin\frac{\phi_1}{2} \\ ie^{-i\frac{\phi_2-\phi_3}{2}}\sin\frac{\phi_1}{2} & e^{-i\frac{\phi_2+\phi_3}{2}}\cos\frac{\phi_1}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.137}$$

そして，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3を順次0にして確認すれば，このSは

$$S = S_{(3)}(\phi_2)\, S_{(1)}(\phi_1)\, S_{(3)}(\phi_3), \tag{2.138}$$

$$S_{(1)}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & i\sin\frac{\phi}{2} \\ i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}, \quad S_{(3)}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.139}$$

と分解することもわかる．そして式(2.51), (2.50), (2.49)と比較していけば，$S_{(1)}(\phi), S_{(3)}(\phi)$は，$(x, y, z)$の変数で見ればそれぞれ$x, z$軸周りの角度$\phi$の回転を引き起こすこともわかる．式(2.138)に現れる角ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3はオイラー

角と呼ばれ，一般の回転を表すパラメターである．S と R の関係を（y 軸周りの回転も含めて）まとめると，

$$S_{(1)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & i\sin\frac{\phi}{2} \\ i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R_{(1)}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \tag{2.140}$$

$$S_{(2)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & \sin\frac{\phi}{2} \\ -\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R_{(2)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \tag{2.141}$$

$$S_{(3)}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow R_{(3)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.142}$$

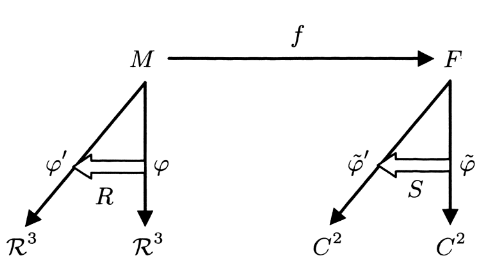
となる．この表式からすぐわかるように，R においての 1 回転（$\phi = 0$ から 2π まで）は S における半回転にしかならないことがわかる．

R は 3 次元実空間の回転を表していた．その R に対して S が決まり，この S は 2 次元複素空間の変換を表す．式 (2.131) にある対応によって，式 (2.133) にあるように，回転 R が表現される．したがって S は，回転 R に対応して，2 次元複素空間において，1 つの系統的な見え方を与える．しかも S は線形変換である．このように S によって変換する量も，十分実在としての資格を持っていると考えてよいだろう．

この 2 次元複素空間の要素 ξ $(\in C^2)$ で，式 (2.134) に対して $\xi' = S\xi$ あるいは成分をあらわに書いて，

$$\xi'^{\alpha} = S^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta} \tag{2.143}$$

と系統的に振舞う量 ξ はスピノル場と言われる（ただしこの節でだけ α, β は $1, 2$ をとると約束し，和記号 $\sum_{\beta=1}^{2}$ はいつものように省略している）．このことによって，スピノル場もテンソル場と同様に物理的実在であると考えられ，回転に対して ξ が一体として振舞う，という意味でスピノル場は自己同一性を持つ．スピノル場 f の写像全体を表すと，



(2.144)

という表式になる．空間の回転 R によって見方を変えると，それに付随して，場の値も S によって変換する．

テンソル場のときと同様，スピノル量 ξ^α を反変スピノルとし，その双対を共変スピノル ξ_α と書こう．式 (2.36) と同様，共変スピノルに対して

$$\xi'_\alpha = S_\alpha{}^\beta \xi_\beta \tag{2.145}$$

で変換するとすれば

$$S^\alpha{}_\beta S_\gamma{}^\beta = \delta^\alpha{}_\gamma \tag{2.146}$$

の関係がある．つまり，式 (2.134), (2.135) を考え合わせて

$$S^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{2.147}$$

に対して，

$$S_\gamma{}^\beta = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{2.148}$$

となる．

これらを重ねあわせてテンソルのときと同じように高階スピノル場を構成していける．これらスピノル場の変換規則は，

$$\xi'^{\alpha\beta} = S^\alpha{}_\gamma S^\beta{}_\delta \xi^{\gamma\delta}, \tag{2.149}$$

$$\xi'^{\alpha\beta\gamma} = S^\alpha{}_\lambda S^\beta{}_\mu S^\gamma{}_\nu \xi^{\lambda\mu\nu}, \tag{2.150}$$

$$\cdots$$

とか，

$$\xi'_{\alpha\beta} = S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta \xi_{\gamma\delta}, \tag{2.151}$$

$$\xi'^\beta{}_\alpha = S_\alpha{}^\gamma S^\beta{}_\delta \xi^\delta{}_\gamma, \tag{2.152}$$

$$\cdots$$

などで，これらはスピノル族を構成する．

なお，式 (2.92) と同様に 2 次元の反対称なスピノル

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.153}$$

は，不変スピノルである：

$$\varepsilon'^{\alpha\beta} = S^\alpha{}_\gamma S^\beta{}_\delta \varepsilon^{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta}, \tag{2.154}$$

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.155}$$

さらに，$\varepsilon^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\beta\gamma}$ はお互いに逆

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{2.156}$$

である．この $\varepsilon^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\beta\gamma}$ を使って反変・共変スピノルを自然に対応付けることができる．

$$\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta, \quad \xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta. \tag{2.157}$$

この事情は計量テンソル g_{ab} によって反変・共変スピノルを自然に対応付けできたテンソルの場合と同様である．これから，例えば縮約 $\xi_\alpha\eta^\alpha = -\xi^2\eta^1 + \xi^1\eta^2$ は不変量である．一方，今考えているのは複素数なので，反変スピノル ξ の共役 ξ^* を考えてみよう．式 (2.147) の複素共役がちょうと式 (2.148) なので，式 (2.143) の複素共役を取れば，ξ^* は共変スピノルと同じ変換則に従うことがわかる．したがって，ξ^* の転置をとって，双対空間の量として $\xi^\dagger$ と書けば，$\xi^\dagger$ は共変スピノルのように振る舞う：$\xi^{\dagger\prime} = \xi^\dagger S^\dagger$.

したがって，2 つのスピノル ξ, η に対して，$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$ や $\xi^{*1}\eta^1 + \xi^{*2}\eta^2$ は不変量，つまりスカラー量となる．実際，

$$\begin{aligned} \left(\xi^\dagger\eta\right)' &= \xi^{\dagger\prime}\eta' \\ &= \xi^\dagger S^\dagger S\eta \\ &= \xi^\dagger\eta \end{aligned} \tag{2.158}$$

であり，スカラー量である．それでは，式 (2.129) で導入されたパウリ行列 $\sigma^{\alpha}_{i\beta}$ を使った $\xi^\dagger\sigma_i\eta$ はベクトルだろうか？ 上の式 (2.140), (2.141), (2.142) の対応から

$$S\sigma_j S^\dagger = R^i{}_j\sigma_i \tag{2.159}$$

あるいは

$$S^\dagger\sigma_j S = R_j{}^i\sigma_i \tag{2.160}$$

なので，

$$\begin{aligned} \left(\xi^\dagger\sigma_i\eta\right)' &= \xi'^\dagger\sigma_i\eta' \\ &= \xi^\dagger S^\dagger\sigma_i S\eta \\ &= R_i{}^j\left(\xi^\dagger\sigma_j\eta\right) \end{aligned} \tag{2.161}$$

となり，$\xi^\dagger\sigma_i\eta$ が共変ベクトルとして振る舞うことがわかる．同様の構成によって，高階のテンソルも構成していけて，すべてのテンソルがスピノルから書ける．逆にスピノルはテンソルでは書けないので，スピノル族はテンソル族より広いことになる．

実際，電子や陽子，中性子など，物質を構成するすべての基本物質粒子はテンソル場ではなくスピノル場で表されることが実験からわかっている[*5].

---

*5 「素粒子物理学」(物理学基礎シリーズ) 坂井典佑著，培風館 (1993).

2.11 場の微分—局所構造

物理量である場の運動を系統的に記述するときの典型的な方法は，その運動方程式を考えることだろう．この運動方程式は座標値 $t, \vec{x}$ に対する偏微分方程式や積分方程式で書かれる．このとき，自己同一性を持った物理的実体が運動しているための前提として仮定しなければならないのは，場が連続して滑らかに時間空間に依存して変化していることである．そのとき，運動方程式には，場の微小変化や微分が必要になる．そして，我々はその方程式を積分していかなければならない．これら微分や積分も物理的な実在であり，テンソルで書かれる必要がある．

初めに微分を考えよう．空間方向の微分は隣り合った空間点の場がどのように関連しているかを表現するが，これは近接相互作用の原理を定量化する重要な量である．例えばスカラー場 $\phi(t, \vec{x})$ を考えよう．この空間に関する微分 $d\phi(t, \vec{x})$ をまず考えよう．テンソルの線形性から，2 つのスカラー量 $\phi(t, \vec{x} + \Delta\vec{x})$, $\phi(t, \vec{x})$ の差 $\phi(t, \vec{x} + \Delta\vec{x}) - \phi(t, \vec{x})$ はスカラーである．$d\phi(\vec{x}, t)$ は，さらに変位 $\Delta\vec{x}$ を無限小にしたものだから，やはりスカラーである．ただし，今，考えているのは式 (2.88) の定義とは微妙に違って，異なる座標値 $\vec{x}$, $\vec{x} + \Delta\vec{x}$ を持つ量の差（和）である．今は幸いスカラーが問題になっているが，これはどんな座標の変換に対しても不変なのだから，差は常にスカラーである．ベクトルや一般のテンソルの場合には，基底 $\{e_i\}$ が場所によらなければ，線形演算をしてもテンソル性は壊れない[*6]．一方 dx^i は Δx^i の無限小の極限である．Δx^i は反変ベクトルの差なのでやはり反変ベクトルである．したがって，ライプニッツの微分規則

$$d\phi(t, \vec{x}) = \frac{\partial\phi(t, \vec{x})}{\partial x^i} dx^i \tag{2.162}$$

から，$\partial\phi(t, \vec{x}) / \partial x^i \equiv \partial_i \phi(t, \vec{x})$ は共変ベクトル場であるべきである．$\partial_i \phi(t, \vec{x})$ はスカラー場 $\phi(t, \vec{x})$ の勾配と呼ばれ，記号 $\mathrm{grad}\,\phi$ あるいは $\vec{\nabla}\phi$ で記される場である．これはベクトル場という明確な変換性を持った量であり，スカラー場 $\phi\left(t, x^i\right)$ の局所的に重要な情報を持つ．例えば，ϕ が地上の土地の高度であれば，ϕ が不変な地点を線で結んで等高線が描ける．ある変位 dx^i に対して ϕ が変わらないというのは，その条件 $d\phi = 0$ を式 (2.162) に使えば，その変位は $\partial_i \phi(x)$ に垂直な方向であることがわかる．

以下，場は一般に空間とともに時間 t の依存性 $\phi(t, \vec{x})$ を持っているが，それが必要でない場面では，時間依存性を省略して $\phi(\vec{x})$ と記そう．

ベクトル場 $A^j(\vec{x})$ に対しても同様に，

$$dA^j(\vec{x}) = \frac{\partial A^j(\vec{x})}{\partial x^i} dx^i \tag{2.163}$$

---

*6 この章では，この場合に限って考えていくが，第 4 章以降，一般の場合も考えていこう．

となる．ここで，$\partial A^j(\vec{x})/\partial x^i \equiv \partial_i A^j(\vec{x})$ は2階の混合テンソル場となる．これから不変テンソル $\delta^i{}_j$ を用いて，誘導されるスカラー量

$$\delta^i{}_j \partial_i A^j(\vec{x}) = \partial_i A^i(\vec{x}) \tag{2.164}$$

があって，これはベクトル場 $A^j(\vec{x})$ の発散と呼ばれる：$\mathrm{div}\,\vec{A}$．これはスカラー場という明確な変換性を持った場であり，ベクトル場 $A^i(\vec{x})$ の有用な情報を持つ．このことは以下具体的に考えていこう．

さらに，不変テンソル ε^{ijk} を用いて，

$$\varepsilon^{ijk}\partial_i A_j(\vec{x}) \tag{2.165}$$

として，もう1つのベクトル場も作ることができる．これは ε^{ijk} を1個含んでいるので擬ベクトルであり，ベクトル場 $A^j(x)$ の回転と呼ばれ，記号 $\mathrm{rot}\vec{A}$ または $\mathrm{curl}\,\vec{A}$ または $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ で記される場である．

一般にテンソル場の微分は，いくらも可能性があるが，テンソル場の1階微分に対して，共変性を兼ね備えた実在としては，以上の grad, div, rot しかない．運動方程式はこれらを用いて構成されるテンソルに対する偏微分方程式でなければならない．

問題 19　$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abc}$ は ε^{ijk} を2個含んでいるので空間反転に対して不変である．したがってそのような不変テンソルは $\delta^i{}_j$ から作られなければならない．$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abc}$ には因子 $\delta^i{}_a\delta^j{}_b\delta^k{}_c$ を含む項があるが，i,j,k（および a,b,c）に対して完全反対称でなければならない．$\delta^i{}_a\delta^j{}_b\delta^k{}_c$ を i,j,k に対して反対称化して，

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{abc} = \det\begin{pmatrix} \delta^i{}_a & \delta^i{}_b & \delta^i{}_c \\ \delta^j{}_a & \delta^j{}_b & \delta^j{}_c \\ \delta^k{}_a & \delta^k{}_b & \delta^k{}_c \end{pmatrix} \tag{2.166}$$

となる．

問題 20　$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kab}$ は ε^{ijk} を2個含んでいるので空間反転に対して不変である．したがってそのような不変テンソルは $\delta^i{}_j$ から作られなければならない．$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kab}$ には因子 $\delta^i{}_a\delta^j{}_b$ を含む項があるが，i,j（および a,b）に対して反対称でなければならない．$\delta^i{}_a\delta^j{}_b$ を i,j に対して反対称化して，

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kab} = \det\begin{pmatrix} \delta^i{}_a & \delta^i{}_b \\ \delta^j{}_a & \delta^j{}_b \end{pmatrix} = \delta^i{}_a\delta^j{}_b - \delta^j{}_a\delta^i{}_b \tag{2.167}$$

となる．

問題 21　$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{kla}$ に対して同様に考えて，ただし k,l に対する縮約が2通りあるので，

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{kla} = 2\delta^i{}_a \tag{2.168}$$

となる．

問題 22　以上からいくつかの有用な公式が導ける：

$\vec{A}\times\big(\vec{B}\times\vec{C}\big)=\vec{B}\big(\vec{C}\cdot\vec{A}\big)-\vec{C}\big(\vec{B}\cdot\vec{A}\big)$.

したがって，$\vec{A}\times\big(\vec{B}\times\vec{C}\big)+\vec{B}\times\big(\vec{C}\times\vec{A}\big)+\vec{C}\times\big(\vec{A}\times\vec{B}\big)=0$,

$\vec{\nabla}\big(\vec{A}\cdot\vec{B}\big)=\big(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{B}+\big(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{A}+\vec{A}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{B}\big)+\vec{B}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{A}\big)$,

$\vec{\nabla}\big(\vec{A}\times\vec{B}\big)=\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$,

$\vec{\nabla}\times\big(\vec{A}\times\vec{B}\big)=\vec{A}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\big)-\vec{B}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\big)+\big(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{A}-\big(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{B}$,

$\vec{\nabla}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{A}\big)=\vec{\nabla}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\big)-\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{A}$.

2.12　場の積分—大局構造

場の微分は，近接相互作用を記述するための隣り合った空間点の場の相関を表現した．この微視的情報を総合して場の運動を大局的に捉えるために必要になるのが積分である．一般に積分は

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{N}A_p dB_p \tag{2.169}$$

という形をしていて，線（1 次元），面（2 次元），あるいは立体（3 次元）の領域にわたって和を計算することができる．考えている領域を排他的に N 個に分け，個々の小領域に重みを指定（p 番目に dB_p）し，その小領域上での着目する量 A_p を，その重みで総和したものである．これら積分も物理的な実在である限り有用で，その場合はテンソルで書かれる必要がある．したがって A_p がテンソルなら，dB_p もテンソルでなければならない．ただし，式 (2.169) は空間について和をとってしまったのでテンソルではあるがもとの意味のテンソル場ではない．

最も自然な重み dB_p は，線上の積分ではベクトル dx^i である．面上では 2 つのベクトル dx^i, dx'^i，から作られるテンソル $dx^i dx'^j$ である．体積上では 3 つのベクトル dx^i, dx'^i, dx''^i，から作られるテンソル $dx^i dx'^j dx''^k$ である．

例えばスカラー場 $\phi(\vec{x})$ の積分で，スカラー量となる積分は，不変テンソル ε_{ijk} を用いて

$$\frac{1}{3!}\int_V \phi(\vec{x})\,\varepsilon_{ijk}dx^i dx'^j dx''^k \tag{2.170}$$

であり，立体領域 V にわたって計算される．本質的でない係数 $1/3!=1/6$ は便宜上付けてある．これはしばしば

$$\int_V \phi(\vec{x})\,dx^1 dx^2 dx^3 \tag{2.171}$$

と表記され，さらに

$$\int_V \phi(\vec{x})\,d^3x, \quad \int \phi dV \tag{2.172}$$

などと略記されることが多い．ここで, (擬) スカラー量 $dV=\varepsilon_{ijk}dx^i dx'^j dx''^k/3!$

は体積要素と呼ばれ，これを立体領域 V で積分した

$$V = \int_V dV \tag{2.173}$$

は立体領域 V の体積と呼ばれる．領域と体積に同じ記号 V を用いるが文脈から混乱はないだろう．

ベクトル場 $\vec{A}(\vec{x})$ の積分で，スカラー量となる積分は，不変テンソル ε_{ijk} を用いると

$$\frac{1}{2!}\int_S A^i(\vec{x})\,\varepsilon_{ijk}dx^j dx'^k \tag{2.174}$$

であり，面領域 S にわたって計算される．これはしばしば

$$\int_S A^i(\vec{x})\,df_i \tag{2.175}$$

と表記され，さらに

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{f} \tag{2.176}$$

と略記されることが多い．ここで（擬）ベクトル量 $df_i = \varepsilon_{ijk}dx^j dx'^k$ は面積要素と呼ばれ，これから作られるスカラー量 $\sqrt{df_i df^i}$ を面領域 S で積分した

$$S = \int_S \sqrt{df_i df^i} \tag{2.177}$$

は面領域 S の面積と呼ばれる．領域と面積に同じ記号 S を用いるが文脈から混乱はないだろう．

ベクトル場 $\vec{A}(\vec{x})$ の積分で，スカラー量となるもう 1 つの積分は，不変テンソル $\delta^i{}_j$ を用いると

$$\int_C \delta^i{}_j A_i(\vec{x})\,dx^j \tag{2.178}$$

であり，線領域 C にわたって計算される．これは

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{x} \tag{2.179}$$

と略記されることが多い．ここでベクトル量 dx^i は線要素と呼ばれ，これから作られるスカラー量 $\sqrt{dx_i dx^i}$ を線領域で積分した

$$l = \int_C \sqrt{dx_i dx^i} \tag{2.180}$$

は線領域 C の長さと呼ばれる．

スカラー量以外のテンソルとなる積分もたくさん作れる．例えば，スカラー場の積分としてベクトル量となる例として，ある領域 V の表面 S に働く等方的な圧力 p の総和としての力 F_i が考えられる．

$$F^i = \int_S p(\vec{x})\,df^i. \tag{2.181}$$

また，流体の流れを考えてみよう．閉じた面 S によって囲まれた領域 V を固

定して考え，時刻 t におけるこの中の総質量を $M(t)$ としよう．それは，

$$M(t) = \int_V \rho(t, \vec{x})\, dV \tag{2.182}$$

と書ける．単位時間当たりに面 S を通って流出する流体の質量 $\dot{M}(t)$ は，密度 $\rho(\vec{x}, t)$・流量 $\vec{v}(\vec{x}, t)$ を用いて，

$$\dot{M}(t) = -\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} \tag{2.183}$$

と書ける[*7]．したがって，質量が保存するのであれば，

$$\int_V \dot{\rho}(\vec{x}, t)\, dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} = 0 \tag{2.184}$$

と書ける．

2.13 微分と積分の関係

さて，微分と積分の基本的な関係を思い起こそう．実関数の積分においては，ある関数 $f(x)$ の微分を積分するともとの関数の境界値の差になった．

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a). \tag{2.185}$$

ここで，積分領域は $[a, b]$ であり，この領域内から見て，外界は a では左向きで b では右向きである．この向きの違いを符号を付して，それぞれ，$-$ および $+$ とすれば[*7]，上の左辺は，境界値の和そのものである．これを $[f(x)]$ と記そう．

$$f(b) - f(a) \equiv [f(x)]. \tag{2.186}$$

3 次元空間のテンソル場の場合はどうだろう？ 例えば，式 (2.171) において，$\phi(\vec{x}) = \partial_i A^i(x)$ の場合を考えてみよう．

$$\int_V \partial_i A^i(x)\, dx^1 dx^2 dx^3 = \int_V \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{2.187}$$

のうち，もし領域内の固定した x^2, x^3 に対して，x^1 がその最小値から最大値まで連続して動けるなら（つまり領域が x^2, x^3 方向に凸），その最大値，最小値に対する A^1 をそれぞれ $A^{1\,\max}$，$A^{1\,\min}$ と記すと，

$$\int_V \frac{\partial A^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 = \int dx^2 dx^3 \left(A^{1\,\max} - A^{1\,\min} \right) \tag{2.188}$$

となる．普通の積分のときと同じように，積分領域内から見て，外界の向きを符号まで含めて考えると，

$$\begin{aligned} \int dx^2 dx^3 \left(A^{1\,\max} - A^{1\,\min} \right) &= \int dx^2 dx^3 \left[A^1 \right] \\ &= \int_S A^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \tag{2.189}$$

---

*7 S 上で $d\vec{f}$ は外向きに定義するのが普通なのでマイナス符号が付いている．

となる．他の成分も同様なので，結局

$$\int_V \partial_i A^i(x)\,dx^1dx^2dx^3 = \frac{1}{2}\int_S A^i\varepsilon_{ijk}dx^jdx^k$$
$$= \int_S \vec{A}\cdot d\vec{f} \qquad (2.190)$$

となる．もし，領域 V が凸でなければ，V を複数の凸領域に分割すると，それぞれに対して上式が成り立つ．しかも，分割された2つの部分領域が接する面（分割面）は，それぞれの部分領域の上端と下端であり，上の符号の約束からちょうど逆符号である．したがって，これらは相殺し，領域 V の本来の境界の寄与のみ残る．したがって，領域が凸でなくても一般に上の式

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}dV = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{f} \qquad (2.191)$$

が成り立つ（ガウスの定理）．

さらに，式 (2.174) において，$A^i(\vec{x})$ を $\varepsilon^{ijk}\partial_j A_k(x)$ としてみよう．つまり，$\mathrm{rot}\vec{A}$ の S 上の積分を考えてみよう．

$$\frac{1}{2}\int_S \varepsilon^{ijk}\partial_j A_k(x)\,\varepsilon_{ilm}dx^l dx'^m = \int_S (\partial_j A_k(x))\,dx^j dx'^k$$
$$= \int_C A_k(x)\,dx^k \qquad (2.192)$$

となる．つまり，

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{A}(x)\cdot d\vec{f} = \int_C \vec{A}(x)\cdot d\vec{x} \qquad (2.193)$$

が成り立つ（ストークスの定理）．ここで，有用な式 (2.167) を用いた．これらの関係式 (2.191), (2.193) は，微分と積分をつなぐ上で有用である．

ある点 x のごく近傍だけで $\mathrm{div}\,\vec{A}$ が正の有限の値を持っていたとしよう．この領域を取り囲むように，点 x を中心に半径 r の球を積分領域 V にとって式 (2.191) の左辺を考えてみよう．それは V によらず一定である．この式の右辺の値は，（S の面積）×（$\vec{A}$が球の外に向かう成分の平均）である．これが正なのだから，$\vec{A}(x)$ の向きは平均して "外向き" であり，その大きさの平均は r^{-2} に比例する．このことから，$\vec{A}(x)$ に対して，中心部から外に向かって放射状の途切れない線束をイメージできる．これは中心で発光し四方に放射状に広がる光の束や中心に置かれた電荷から伸びる電気力線になぞらえることができる．$\mathrm{div}\,\vec{A}$ が負であれば，以上の描像は逆方向になり，点 x に向かっての線束の収束になぞらえることができる．このように一般に，$\mathrm{div}\,\vec{A}$ とは，ベクトル場 $\vec{A}$ で表される流れの湧き出し・吸い込み（源）を表している．

同様に，ある点 x のごく近傍でだけ $\mathrm{rot}\vec{A}$ が有限の値を持っていたとしよう．この方向に垂直に半径 r の円盤 S を点 x を中心に含むように，そして $d\vec{f}$ と $\mathrm{rot}\vec{A}$ が平行になるように，とってみよう．すると，式 (2.193) の左辺は (S の面積) × $|\mathrm{rot}\vec{A}|$ である．右辺は，S の縁に沿っての $\vec{A}(x)$ の一周積分であ

り，この値は，(C の長さ) $\times$ ($\vec{A}\cdot d\vec{x}$の平均) である．これが正なのだから $\vec{A}(x)$ の向きは点 x の周りでぐるっと回っていることになる．これはまさにベクトル場 $\vec{A}$ で表される流れが x の周りで渦を作っていることに相当する．$\mathrm{rot}\vec{A}$ は渦の回転軸の方向を指定し，その大きさは $|\mathrm{rot}\vec{A}| = (2\vec{A}\cdot d\vec{x}$の平均$)/(x$ からの距離) であり，渦の強さを表す．

問題 23　式 (2.167) から $\delta^i{}_a\delta^j{}_b = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kab} + \delta^j{}_a\delta^i{}_b$ を $B^b\partial_i A_j$ に用いると $B^j\partial_a A_j$ を，$\vec{B}$ 方向への微分 $\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$ と，$\vec{B}$ に垂直な微分 $\vec{B}\times\mathrm{rot}\vec{A}$ とに分解できる．

2.14　ベクトル場を決めるもの

上で考察した局所構造と大局構造，そしてそれらの間の関係をもとに，流れなどを表すベクトル場が結局何によって決まるのか，その決定要素を考えてみよう．流れの場合，その顕著な構造は，流体が湧き出し，流れて，終には吸い込みに至って終わる．あるいは渦を作って同じところを周回する．そしてまた，これらの構造が折り重なっている．したがって，ベクトル場に特徴的な要素は「源」(湧き出しとか吸い込み) と「渦」であろうと考えられる．これらはどれだけ一般のベクトル場を決めてしまうのだろうか？

まず背理的に議論を進めてみよう．もし渦がどこにもなかったら，流れはどんな要素から決まるだろうか？ どこにも渦がない条件，つまりすべての点で

$$\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x}) = 0 \tag{2.194}$$

であることを式 (2.193) に用いると，任意の閉じた曲線 C に沿って

$$\int_C \vec{A}(x)\cdot d\vec{x} = 0 \tag{2.195}$$

を得る．閉じた曲線 C が (どこでもよいが) 原点 $\vec{0}$ と，任意の点 $\vec{x}_1$ を含むとしよう．すると，これは，$\vec{0}$ から $\vec{x}_1$ に至る任意の曲線 C_1 に対して $\int_{C_1}\vec{A}(x)\cdot d\vec{x}$ が $\vec{x}_1$ だけの関数として決まることを意味する．これを $\phi(\vec{x}_1)$ と記そう．つまり，

$$\int_{C_1}\vec{A}(x)\cdot d\vec{x} = \phi(\vec{x}_1) \tag{2.196}$$

である．この右辺は

$$\phi(\vec{x}_1) = \int_{C_1}\mathrm{grad}\,\phi(x)\cdot d\vec{x} \tag{2.197}$$

と書ける．曲線 C_1 は任意だったので，任意の点 $\vec{x}$ で

$$\vec{A}(x) = \mathrm{grad}\,\phi(x) \tag{2.198}$$

が成立する．まとめると，渦のないとき，つまり $\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x}) = 0$ なら $\vec{A}(x) = \mathrm{grad}\,\phi(x)$ となるスカラー場 $\phi(\vec{x})$ がある：

$$\mathrm{rot}\vec{A}\,(\vec{x})=0\Rightarrow\exists\phi\,(\vec{x})\quad\mathrm{s.t.}\ \ \vec{A}\,(x)=\mathrm{grad}\,\phi\,(x)\,. \tag{2.199}$$

渦なしベクトル場は1つのスカラー場を要素としてその勾配で書ける，という特性を持っている．

同様に，もし源（湧き出しや吸い込み）がどこにもなかったら，流れはどんな要素から決まるだろうか？ どこにも源がない条件，つまりすべての点で

$$\mathrm{div}\,\vec{A}\,(\vec{x})=0 \tag{2.200}$$

であることを式 (2.191) に用いると，任意の閉じた曲面 S に対して

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{f}=0 \tag{2.201}$$

を得る．閉じた曲面 S がある閉じた曲線 C を含むとしよう．すると，これは，C をその境界に持つ任意の曲面 S_1 に対して $\int_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{f}$ が C だけの関数として決まることを意味する．これを $\phi(C)$ と記そう．つまり，

$$\int_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{f}=\phi\,(C) \tag{2.202}$$

である．C だけの関数として決まる右辺のスカラー量は，曲線 C に沿った積分から構成するしかない．つまり，あるベクトル場 $\vec{B}\,(\vec{x})$ があって

$$\phi\,(C)=\int_C \vec{B}\cdot d\vec{x} \tag{2.203}$$

と書ける．式 (2.193) から，この右辺は，C を境界に持つ任意の曲面 S に対して，したがって S_1 に対して

$$\phi\,(C)=\int_{S_1}\mathrm{rot}\vec{B}\,(x)\cdot d\vec{f} \tag{2.204}$$

と書ける．式 (2.202), (2.204) から，曲面 S_1 は任意だったので，任意の点 $\vec{x}$ で

$$\vec{A}\,(x)=\mathrm{rot}\vec{B}\,(x) \tag{2.205}$$

が成立する．まとめると，源のないとき，つまり $\mathrm{div}\,\vec{A}\,(\vec{x})=0$ なら $\vec{A}\,(x)=\mathrm{rot}\vec{B}\,(x)$ となるベクトル場 $\vec{B}\,(\vec{x})$ がある：

$$\mathrm{div}\,\vec{A}\,(\vec{x})=0\Rightarrow\exists\vec{B}\,(\vec{x})\quad\mathrm{s.t.}\ \ \vec{A}\,(x)=\mathrm{rot}\vec{B}\,(x)\,. \tag{2.206}$$

源のないベクトル場は，もう1つのベクトル場を要素としてその rot で書ける，という特性を持っている．ただし，このベクトル場 $\vec{B}\,(\vec{x})$ は一意には決まらず，任意のスカラー場 $g\,(\vec{x})$ を使って

$$\vec{B}'\,(\vec{x})=\vec{B}\,(\vec{x})+\mathrm{grad}\,g\,(\vec{x}) \tag{2.207}$$

としてもよい：$\mathrm{rot}\vec{B}'=\mathrm{rot}\vec{B}$．特に，$\Delta g\equiv\partial^i\partial_i g=-\,\mathrm{div}\,\vec{B}$ ととることによって，いつでも

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0 \tag{2.208}$$

とできる．

では，ベクトル場 $\vec{A}(\vec{x})$ に渦がなく，源もない場合はどうだろうか？ 上の考察から，前者から $\vec{A}(\vec{x}) = \mathrm{grad}\,\phi(\vec{x})$ と書けて，さらに後者から $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(\vec{x}) = 0$，つまり，$\phi(\vec{x})$ はラプラス方程式

$$\Delta\phi(\vec{x}) \equiv \partial^i \partial_i g = 0 \tag{2.209}$$

を満たすことになる．この式はいろいろな場面で出てくるのでその解を整理しておきたい．せっかくだからもっと一般に，ϕ を作るもととなるスカラー場 $\rho(\vec{x})$ がある場合（ポアソン方程式）

$$\Delta\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \tag{2.210}$$

を考察してみよう．1 つの手がかりがあって，$\psi(\vec{x}) \equiv 1/|\vec{x} - \vec{x}_0|$ という関数は，$\vec{x}_0$ 以外で

$$\Delta\psi(\vec{x}) = 0 \tag{2.211}$$

を満たすことは確認すればすぐわかる．さらに $\Delta\phi(\vec{x})$ および $\Delta\psi(\vec{x})$ の情報を使って，ポアソン方程式を解いていくために，上で考察した積分の関係を考えよう．式 (2.191) の A^i に $\psi\partial^i\phi$ や $\phi\partial^i\psi$ を用いればよいだろう．これらの差をとると $(\partial_i\phi)\left(\partial^i\psi\right)$ が消えて特に都合がよい．つまり，

$$\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\, dV = \int_S \left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right) df_i \tag{2.212}$$

から，手持ちの情報を最大に使える．つまりこの左辺は，知っている量 $\psi\rho$ の体積積分となる．ただ，$\vec{x}_0$ では式 (2.211) が使えないので，領域 V は，$\vec{x}_0$ を取り囲む半径 ε の小さな球面 S_ε と大きな面 S_1 とで囲まれた部分を考えよう．したがって $S = S_1 - S_\varepsilon$ となる（符号はいつも考えている領域の外向きに df_i を正としている）．すると

$$\int_V \psi\rho dV = \int_{S_1} \left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right) df_i - \int_{S_\varepsilon} \left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right) df_i \tag{2.213}$$

であるが，S_ε の球面上の積分は簡単になり，$\varepsilon \to 0$ では $\psi \to O\left(\varepsilon^{-1}\right)$，$\partial\phi/\partial r \to O\left(\varepsilon^0\right)$ なので

$$\int_{S_\varepsilon} \left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right) df_i = \int_{S_\varepsilon} \left(\varepsilon^2\psi\frac{\partial\phi}{\partial r} + \phi\right) \sin\theta d\theta d\varphi = O(\varepsilon) + 4\pi\phi(\vec{x}_0) \tag{2.214}$$

と遂行できる．したがって

$$\phi(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \psi\rho dV + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} \left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right) df_i \tag{2.215}$$

という解が得られる．ただし，$\psi(\vec{x}) = 1/|\vec{x} - \vec{x}_0|$ である．つまり，$\phi(\vec{x}_0)$ は一般に，源の分布 $\rho(\vec{x})$ と境界上の ϕ, $\partial^i\phi$ の値から決まる．もし S_1 を大きな半径 R の球面と取れば，上の S_1 の積分項は $O(\phi)$ となり，$r \to \infty$ のとき $\phi \to 0$

なら，

$$\phi(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V |\vec{x}-\vec{x}_0|^{-1}\rho dV \tag{2.216}$$

となる．さらにこれから，総物質が有限であったり，物質分布が有限領域に限られるときは，$r\to\infty$ のとき $\phi = O\left(r^{-1}\right)$ と振る舞うことがわかる．

さて，ベクトル場に湧き出しや吸い込みがなく，渦もない場合に戻ろう．式 (2.191) の A^i に対して $\phi\vec{A}$ つまり $\phi\partial^i\phi$ を用いれば，

$$\int_V \partial_i\left(\phi\partial^i\phi\right)dV = \int_V \phi\Delta\phi + A_iA^i dV = \int_S \phi\partial_i\phi df^i \tag{2.217}$$

となる．上と同じように ϕ が遠方 $(r\ \to\ \infty)$ で $O\left(r^{-1}\right)$ と振る舞うなら $\partial_i\phi\to O\left(r^{-2}\right)$ である．上の式で $V\to\infty$ とすれば，右辺は $r\to\infty$ での評価になり，消える．中辺は第 2 項だけが残り，これは正定値な量の積分である．したがっていたるところで $\vec{A}(\vec{x})=0$ となる以外ありえないことになる．まとめると，源も渦もないベクトル場は $\vec{A}(\vec{x})=0$ しかない．

では逆に，ベクトル場 $\vec{A}(x)$ に源や渦のある一般の場合はどうだろう？ 上の考察から推測して，任意のベクトル場 $\vec{A}(x)$ は源 $\mathrm{div}\,\vec{A}$ と渦 $\mathrm{rot}\vec{A}$ から一意的に決まるのだろうか？ そして $\vec{A}(x) = \mathrm{grad}\,\phi(x) + \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x})$ と書けるのだろうか？

まず，あるベクトル場 $\vec{A}(x)$ が源 $\mathrm{div}\,\vec{A}=\rho$ と渦 $\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{B}$ を持つとしよう．同じ源 ρ と渦 $\vec{B}$ を持つもう 1 つのベクトル場 $\vec{A}'(x)$ があれば，その差 $\vec{A}''(x)\equiv\vec{A}(x)-\vec{A}'(x)$ は，

$$\mathrm{div}\,\vec{A}''=0,\quad \mathrm{rot}\vec{A}''=0 \tag{2.218}$$

を満たすので，すぐ上の考察から $\vec{A}''=0$，つまりベクトル場 $\vec{A}(x)$ は一意に決まることがわかる．

では次に，

$$\vec{A}(x) = \mathrm{grad}\,\phi(x) + \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{x}) \tag{2.219}$$

と書けたとすると，

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \Delta\phi \tag{2.220}$$

となる．やはり上の考察から，式 (2.215) のように

$$\phi(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{div}\,\vec{A}}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}dV \tag{2.221}$$

となる．ただし，境界項 $\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left(\psi\partial^i\phi - \phi\partial^i\psi\right)df_i \quad \left(\psi(\vec{x}) = 1/|\vec{x}-\vec{x}_0|\right)$ は消えるという付帯条件が必要である．これを式 (2.220) に入れると，

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}-\mathrm{grad}\,\phi\right)=0 \tag{2.222}$$

となり，式 (2.206) から

$$\vec{A} - \mathrm{grad}\,\phi = \mathrm{rot}\vec{B} \tag{2.223}$$

となるベクトル場 $\vec{B}$ がある．ここで, rot をとると, 先に述べたように $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ ととっても一般性を失わないので,

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{A} &= \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{B}) \\ &= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \varDelta\vec{B} \\ &= -\varDelta\vec{B} \end{aligned} \tag{2.224}$$

となる．上の解き方 (2.221) をベクトル場 $\vec{B}$ に応用して,

$$\vec{B}\,(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\vec{A}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}dV \tag{2.225}$$

となり, $\vec{B}$ が $\mathrm{rot}\vec{A}$ で表される．ただし，境界項は無視した．結局式 (2.221) および式 (2.225) の $\phi, \vec{B}$ を用いて，ベクトル場 $\vec{A}\,(\vec{x})$ の分解式 (2.219) が一意に確定する：

$$\vec{A}\,(x) = \mathrm{grad}\,\phi\,(x) + \mathrm{rot}\vec{B}\,(\vec{x}) + \vec{\gamma}, \tag{2.226}$$

$$\phi\,(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{div}\,\vec{A}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}dV, \tag{2.227}$$

$$\vec{B}\,(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\vec{A}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}dV, \tag{2.228}$$

$$\varDelta\vec{\gamma} = 0. \tag{2.229}$$

ただし $\vec{\gamma}$ は，上の考察からは除外した，一般に有限の境界がある場合に効いてくるかもしれない項である．

ここで，我々が初めに提起した問題を再び考察してみよう．自然にどこにでも普遍的にある「流れ」を決めているものは結局何なのだろうか？ この節での議論において，ベクトル場 $\vec{A}\,(\vec{x})$ を流れの場 $\vec{v}\,(t, \vec{x})$ と考えるよう．すると流れ $\vec{v}\,(t, \vec{x})$ は，湧き出しや吸い込みなどの源から決まる部分 $\mathrm{grad}\,\phi\,(\vec{x})$ と，渦から決まる部分 $\mathrm{rot}\vec{B}\,(\vec{x})$，および境界から決まる部分 $\vec{\gamma}$ から一意的に生成される．つまり，我々が初めに想起した流れの特徴，源と渦，はまさに流れの本質を突いていたことになる．さらにこの流れの時間発展は次の章で考察され，式 (3.62) で記述されることになる．

問題 24　ベクトル $\vec{A}\,(x)$ の分解式 (2.219) の両ベクトル $\mathrm{grad}\,\phi\,(x)$ と $\mathrm{rot}\vec{B}\,(\vec{x})$ はどのような違いがあるのだろうか？ 例えば，ベクトルか擬ベクトルか．また，$\vec{A}\,(x)$ をフーリエ分解したときの横波か縦波か，など．

問題 25　ベクトル $\vec{A}\,(x)$ は式 (2.219) のように一意に分解された．一般階数のテンソルはどうか？

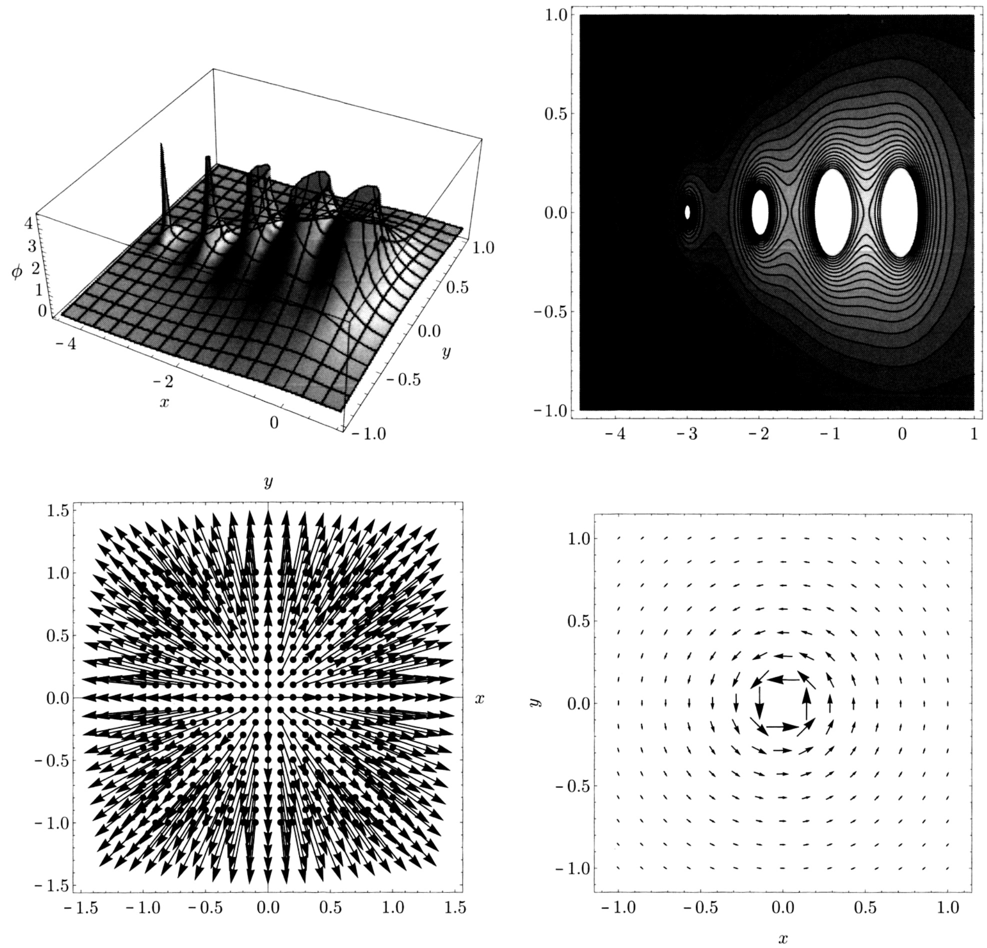


図 2.1

上左：スカラー場 ϕ の例．図のグリッドを施された平面は，$x-y$ 平面上の 1 点から 1 つの実数値（場の値）を対応させている．つまり $\phi : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$．場の値があまりに大きくなる上部はカットして表示されている．実際には特異点であり，$y=0, x=0,-1,-2,-3,-4,\cdots$ に位置する．実態はガンマ関数 $\Gamma(z)$．地図でいう鳥瞰図に相当する．

上右：左の図と同じスカラー場の等高線図を用いた表示．場の値が同じ地点を線で結んだ．濃いほうが値が小さい．地図でいう等高線地図に相当する．

下左：発散のあるベクトル場 $\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ の例．原点の発散が有限．格子状の黒丸たちは $x-y$ 平面で表された $\mathcal{R}^2$ に属する．矢印はその矢印の根元の点に対応するベクトル場の値 $\in \mathcal{R}^2$ を表示する．従ってこの図には，場所を表す空間 $\mathcal{R}^2$ と場を表す空間 $\mathcal{R}^2$ が一緒に表示されている．黒丸点は前者に，矢印は後者に属する．

下右：回転のあるベクトル場 $\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ の例．原点の回転が有限．矢印の中点たちは $x-y$ 平面で表された $\mathcal{R}^2$ に属する．矢印はその中点に対応するベクトル場の値 $\in \mathcal{R}^2$ を表示する．従ってこの図には，場所を表す空間 $\mathcal{R}^2$ と場を表す空間 $\mathcal{R}^2$ が一緒に表示されている．中点は前者に，矢印は後者に属する．

【参考書籍】

- 「基礎物理数学　第4版 Vol. 1　ベクトル・テンソルと行列」, ジョージ. ブラウン・アルフケン, ハンス. J・ウェーバー, 権平健一郎, 神原武志, 小山直人 (訳), 講談社 (1999).
- 「テンソル解析」 (基礎数学選書 23), 田代嘉宏, 裳華房 (1981).

第 3 章
粒子・場の力学

この章では，前章で同定された物理的実在のダイナミクスを議論していこう．

今まで「流れ」を興味の出発点として実在の形態を議論してきた．つまり，視点の変更に対して系統的に変換しなければ実在として認識できないのであった．この議論は，物理学におけるさまざまな基礎方程式を規定し，その形のかなりの部分を決定してしまう．そのような例を順に見ていこう．もちろん，方程式が一意に完全に決まるわけではなく，一般形を規定するに過ぎない．特に，可能な項の存在までは導けるが，その係数までは出てこない場合が多い．それは「物理量」の数値を決めるためにはその物理量の単位を指定（定義）しなければならない事情による．方程式の最終的な導出は，物理的な内容をきちんと議論した上で，全体の整合性の上に経験的事実からなされるものである．ここの議論はそれに相補的な一側面でしかない．

3.1 粒子の力学

対象とする物体は，その運動領域に比べて小さく，さらに特別な内部構造を持たなければ，それは空間的に局在した極限としての質点として表現される．つまり，時刻 t に空間の点 $\vec{x}(t)$ を占める対象である．そして，この写像

$$t \to \vec{x}(t) \tag{3.1}$$

が質点の運動である．この記述の背後にあるのは，式 (1.12) で表される構造であり，2.1 節で議論した空間 S, S^* や座標 φ である．質点の局所的な運動は，その位置 $\vec{x}(t)$ の時間変化の割合つまり速度 $\dot{\vec{x}}(t) \equiv d\vec{x}(t)/dt$ や，速度の時間変化の割合 $\ddot{\vec{x}}(t) = d^2\vec{x}(t)/dt^2$ などで特徴付けられる．ここで 2.9 節で議論した物理法則のあり方を思い出そう．運動の法則は，これら $\dot{\vec{x}}(t)$ や $\ddot{\vec{x}}(t)$ がどう決まるかを与える形で記述される．$\dot{\vec{x}}(t)$ や $\ddot{\vec{x}}(t)$ はベクトルなので，運動を駆動する要因は（時間に依存した）ベクトルの形 $\vec{F}(t)$ で導入されるべきであり，これ

は「力」あるいは「外力」と呼ばれる．この力 $\vec{F}(t)$ 自体が，一般に $\vec{x}(t)$, $\dot{\vec{x}}(t)$ や $\ddot{\vec{x}}(t)$ に依存するかもしれない．この記述は通常，微分方程式となる．まとめると運動の法則は，c_1 や c_2 を定数として，最も簡単な形

$$\dot{\vec{x}}(t) = c_1\vec{F}(t) \tag{3.2}$$

あるいは，次に簡単な形

$$\ddot{\vec{x}}(t) = c_2\vec{F}(t) \tag{3.3}$$

となる．もっと複雑に，時間の 3 階微分以上の項が入る余地があるかもしれない．しかし，「自然は本質的に単純で美しい」という信念から，単純なものの可能性から順番に検証することにしよう．これらの式の右辺にある力が原因となって左辺の変動を引き起こすのである．以上のような物理量の間の相関を与える運動の法則は，当然座標回転に対して不変な形にとどまる．上の場合は，(ベクトル) = (ベクトル) という形である．

式 (3.2) は時間に関して 1 階の微分方程式であり，以前議論した時間反転対称性 T を壊している．これは質点の運動を妨げる要因である摩擦の力が大きい場合である．摩擦は非常に多くの自由度が着目する質点に対してマクロに働く力の 1 つの形態である．一方，式 (3.3) は時間反転対称性 T を壊さない．これは摩擦力が働かない場合であり，定数 $1/c_2\,(\equiv m)$ は質量と呼ばれる．質点の運動に関与する自由度が少数の場合には，運動はこのニュートンの法則の形になる．この時間反転対称性 T を壊さない式 (3.3) が，より基本的で普遍的な法則であると認識されている．これに限らず，物理の基礎方程式は本来時間反転対称性 T を壊さない，つまり可逆であるという思想が物理にはあり，少なくとも今まで，自然の記述に対して大いに成功してきた．自由度が増えたときは現象論的に摩擦を表す効果を順次入れて，基礎方程式を修正していくのである．このように，空間回転によるテンソル性とともに，時間反転対称性 T に対する応答も基礎方程式を構成していく上で重要な役割を持っている．上の例では，基礎方程式 (3.3) に，式 (3.2) で表される摩擦を取り入れて，一般の現象論的運動方程式 $m\ddot{\vec{x}}(t) + \mu\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$ を構成できる．定数 μ は摩擦係数と呼ばれ，μ が大きいほど質点は早く止まってしまう．

力学の基本方程式 (3.3) によると，力 $\vec{F}(t)$ が働かない場合 ($\vec{F}(t) = 0$) は，速度 $\dot{\vec{x}}(t)$ が保存する．これは，動いているものはそのまま動き続ける，あるいは止まっているものはそのままとどまり続けるという慣性の法則を言っている．そしてこのとどまり続ける傾向，慣性は質量に比例する．

さらに，基礎方程式 (3.3) に対して，$\vec{v}(t)\ \ (= d\vec{x}(t)/dt)$ との内積を作ってみよう．

$$m\dot{x}_i(t)\cdot\ddot{x}^i(t) = \dot{x}_i(t)\cdot F^i(t)\,. \tag{3.4}$$

左辺は $d\big(m\big(\dot{\vec{x}}(t)\big)^2/2\big)/dt$ とまとまる．もし右辺も同様に $d\,(X(t))\,/dt$ の

形になるとすれば，$d\left(\left(m\left(\dot{\vec{x}}(t)\right)^2/2\right)-X(t)\right)/dt=0$ となり，保存量 $\left(m\left(\dot{\vec{x}}(t)\right)^2/2\right)-X(t)$ が見つかる．この，力 $\vec{F}(t)$ に対する条件 $\dot{\vec{x}}(t)\cdot\vec{F}(t)=\dot{X}(t)$，は，例えば，$\vec{F}(t)$ が $\vec{x}(t)$ だけの関数であり，$F_i(t)=dX(t)/dx^i(t)$ であれば満たされる．通常，$V\equiv -X$ というスカラー量はポテンシャルと呼ばれる．つまり，

$$F_i(t)=-\frac{dV(x(t))}{dx^i(t)} \tag{3.5}$$

と書かれる力が働く場合には，スカラーの保存量

$$E\equiv\frac{m\dot{\vec{x}}(t)^2}{2}+V(x) \tag{3.6}$$

が存在し，これはエネルギーと呼ばれる：

$$\frac{dE}{dt}=0. \tag{3.7}$$

以上のように，力 $\vec{F}(t)$ があからさまな時間依存性を持たず，単に $\vec{x}(t)$ だけを通して時間に依存していることは，時間に特別な時刻がないこと，つまり時間の一様性を表現している．エネルギーの保存則 (3.7) はこの時間一様性の帰結である．

ちなみに，ポテンシャル $V(x)$ が一定，つまり力 $\vec{F}(t)$ が働かない場合は，式 (3.3) から $m\dot{x}(t)$ が保存することがすぐわかる．通常，

$$\vec{P}\equiv m\dot{\vec{x}}(t) \tag{3.8}$$

という保存量は運動量と呼ばれる：

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=0. \tag{3.9}$$

この場合のようにポテンシャル $V(x)$ が x によらないことは，空間がどこでも等質であること，つまり空間の一様性を現している．運動量の保存則 (3.9) はこの空間一様性の帰結である．一般の力に対しては，式 (3.4) から，エネルギーの単位時間当たりの増分は

$$\dot{\vec{x}}\cdot\vec{F} \tag{3.10}$$

となり，これは力積と呼ばれる．

上では，式 (3.3) の右辺に関連して，スカラー量 V というポテンシャルを導入した．これを x で微分すると式 (3.5) にあるように力が現れるのであった．では，式 (3.3) の左辺に関連しても同様のスカラー量（Y と書こう）は存在するのだろうか？ もしあれば，$Y+V$ を $\vec{x}$ で微分すると零になる，という図式で，ベクトル量としての運動方程式がでてくる．つまり，あるスカラー量 $Y+V$ があって，運動はそれを最小（正確には極小）にするように行われるのである（符号によって最大（極大）でもかまわない）．このような綺麗な形式が作られたとすると，そんな普遍的なスカラー量とは何だろう？

例えば $Y=mx\ddot{x}$ としたらどうだろうか？ しかしこれでは x を微分する分

にはよいが，$\ddot{x}$ をどのように x で微分したらよいかわからない．時間微分が邪魔である．そもそも，x は数ではなく関数 $x(t)$ である．一般に関数の微分（変分と呼ばれ記号 δ で表される）は，

$$\frac{\delta \int_{t_1}^{t_2} f\left(x\left(t'\right)\right) dt'}{\delta x\left(t\right)} = f'\left(x\left(t\right)\right) \tag{3.11}$$

と決めるのが自然であろう．微小変化なのでチェーン規則は成立する．そしてこの形になれば $\ddot{x}(t)$ を「部分積分」によって退けることはできないだろうか？つまり，

$$Y = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} x\left(t\right) \ddot{x}\left(t\right) dt \tag{3.12}$$

としてみる．もし境界 t_1, t_2 で $x(t)$ あるいは $\dot{x}(t)$ が消えるならば，

$$\begin{aligned} Y &= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \dot{x}\left(t\right) \dot{x}\left(t\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \ddot{x}\left(t\right) x\left(t\right) dt \end{aligned} \tag{3.13}$$

なので，Y の両方の $x(t)$ に関して微分（変分）がとれて，うまく

$$\frac{\delta Y}{\delta x\left(t\right)} = m\ddot{x}\left(t\right) \tag{3.14}$$

となる．$-Y$ は運動エネルギーの時間積分である．したがって

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}\left(t\right)^2 - V\left(x\left(t\right)\right) \tag{3.15}$$

として，

$$\begin{aligned} S &\equiv Y - \int_{t_1}^{t_2} V dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

とすれば，運動は S を最小にするように，つまり

$$\delta S = 0 \tag{3.17}$$

によって決まっていくことになる．スカラー量 L はラグランジアンと呼ばれ，運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを差し引いたものであり，明らかにエネルギーとは異なる．L を積分した S は作用と呼ばれる[*1]．

ちなみに上で必要であった境界条件，「境界 t_1, t_2 で $x(t)$ あるいは $\dot{x}(t)$ が消える」は強すぎて不都合である．しかし，必要であった条件は，「変分をとっても効かない」($\delta\left(x\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)\right) = 0$) ということであり，そのように「変分」を定義し直したらよい．つまり，式 (3.11) 左辺は

$$\lim_{\delta(x)\to 0} \frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[f\left(x\left(t'\right) + \delta x\left(t'\right)\right) - f\left(x\left(t'\right)\right)\right] dt'}{\delta x\left(t\right)} \Big|_{\delta x(t_1)=0, \delta x(t_2)=0} \tag{3.18}$$

である．

[*1] この S は式 (3.94) の S と本質的に同じものである．

問題 26 摩擦項 $\mu\dot{x}(t)$ がある場合は，上のような作用関数 S を構成できるだろうか．

問題 27 変分の方法を論理的に整理してみよう．通常は，$x, \dot{x}$ を独立な 2 つの量とみなし，$L(x, \dot{x}, t)$ と設定する．

問題 28 作用 S，ラグランジアン L の意味を考えてみよう．

さらに，式 (3.3) に対して，$\vec{x}(t)$ との外積を作ってみよう．

$$m\vec{x} \times \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{x} \times \vec{F}(t). \tag{3.19}$$

左辺は $d\big(m\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)\big)/dt$ とまとまる．もし右辺が 0，つまり力 $\vec{F}(t)$ が動径方向 $\vec{x}$ に平行であるなら，別の保存量

$$\vec{J} \equiv m\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t) \tag{3.20}$$

が見つかる．

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0. \tag{3.21}$$

ベクトル $\vec{J}$ は，この粒子の角運動量と呼ばれる．力 $\vec{F}(t)$ が特定の方向でなく，単に動径方向 $\vec{x}$ を向いていることは，空間に特別な方向がないこと，つまり空間の等方性を表現している．角運動量保存則 (3.21) はこの空間等方性の帰結である．

力 $\vec{F}(t)$ の形は，関与する過程によって多様である．他の粒子との相互作用あるいは，電場や磁場で表現されたりする．他の粒子との相互作用で表される場合，その中で簡単な力として，他の粒子 $\vec{x}_s(t)$ との隔たり $\vec{x}(t) - \vec{x}_s(t) \equiv \vec{r}(t)$ のみによる力（中心力）が考えられる．この場合，力は

$$\vec{F}(t) = \alpha(r)\,\vec{r} \tag{3.22}$$

の形となる．ここで，$r \equiv |\vec{r}|$[*2]．関数 $\alpha(r)$ が定数 $\alpha(r) = k$ の場合は，調和振動（あるいは小振幅の振り子）であり，$\alpha(r) = k_1 r^{-3}$ の場合は，重力 ($k_1 = -Gmm_s$) であったりクーロン力 ($k_1 = qq_s$) であったりする．ここで，他の粒子の質量と電荷をそれぞれ m_s, q_s と書いた．G は重力定数である．

3.2 剛体の運動方程式

現実の物体は大きさのない質点のようなものではなく，空間的広がりをもっている．このことを考えよう．空間に広がってお互いの位置関係を変えない物体あるいは複数の質点系を剛体と呼ぼう．位置関係を変えない，というのは近似である．このようなものが厳密に存在するかどうかわからないが，いろいろ

*2 力が非等方である場合，ある定数ベクトル $\vec{a}$ を導入して，$\vec{F}(t) = \alpha(r)\,\vec{a} \times \vec{r}$ の形もありうる．ただし，この力は座標反転に対して符号を変えず，擬ベクトルとして振る舞う．

なものに対して有効な記述である．剛体は重心の位置とその周りの回転に対して，それぞれ 3 個都合 6 個の自由度を持っている．したがってその記述のためには 6 個の運動方程式が必要になる．個々の構成粒子に対してはそれぞれ基礎方程式 (3.3) が成立するので，これらはそこから導けるはずのものである．

まず，系が N 個の質点（そのラベル $\alpha = 1, 2, \cdots, N$）から構成されているとして，各質点に対する運動方程式の総和をとれば，

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d^2 \vec{x}_\alpha(t)}{dt^2} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \tag{3.23}$$

となる．この左辺に，重心ベクトル

$$\vec{X} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{x}_\alpha(t) \tag{3.24}$$

に対する運動量ベクトル

$$\vec{P} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\vec{x}_\alpha(t)}{dt} \tag{3.25}$$

を使えば，式 (3.23) は

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \tag{3.26}$$

と書ける．右辺はこの物体に働く力の総和のベクトルである．この式は重心 $\vec{X}$ に対する 3 つの運動方程式を与え，剛体全体の空間位置を決める．

運動を完全に決定するためには，さらに剛体自身の回転に対する配位を決める方程式が必要である．そのために個々の方程式 (3.3) に対して，$\vec{x}_\alpha(t)$ との外積をとった式を総和してみよう．すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{x}_\alpha(t) \times \dot{\vec{x}}_\alpha(t)\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}_\alpha(t) \times \vec{F}_\alpha \tag{3.27}$$

となる．この式の右辺

$$\vec{N}(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{x}_\alpha(t) \times \vec{F}_\alpha \tag{3.28}$$

は，剛体への力のかかり具合を表現するベクトル量で，力のモーメントと呼ばれる．一方，式 (3.27) 左辺の括弧内は総角運動量

$$\vec{J}_{tot} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{x}_\alpha(t) \times \dot{\vec{x}}_\alpha(t) \tag{3.29}$$

を表すベクトルである．この右辺にある dx/dt は剛体の回転の時間変化なので，その回転を表すベクトルを $\vec{W}(t)$ と記して，これを力学変数としよう．すると，$d\vec{x}(t) = d\vec{W}(t) \times \vec{x}(t)$（問題参照）から

$$\frac{d\vec{x}\,(t)}{dt} = \frac{d\vec{W}\,(t)}{dt} \times \vec{x}\,(t)$$
$$= \vec{\omega}\,(t) \times \vec{x}\,(t) \tag{3.30}$$

となる．ここで，$\vec{\omega}\,(t) \equiv d\vec{W}\,(t)\,/dt$ とした．これを用いて，

$$\vec{J}_{tot} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{x}_\alpha\,(t) \times (\vec{\omega}\,(t) \times \vec{x}_\alpha\,(t)) \tag{3.31}$$

となるので，これをさらに簡単にして，

$$J^i_{tot} = \omega_j\,(t) \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x^l x_l \delta^{ij} - x^i x^j\right)$$
$$= \omega_j\,(t)\, I^{ij}\,(t) \tag{3.32}$$

と書ける．ここで，

$$I^{ij}\,(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x^l x_l \delta^{ij} - x^i x^j\right) \tag{3.33}$$

はこの剛体の慣性テンソルと呼ばれる．これは剛体中の質量の分布具合を特徴付ける量の 1 つである．

まとめると運動方程式 (3.27) は

$$\frac{d\left(I^{ij}\omega_j\right)}{dt} = N^i \tag{3.34}$$

となる．これは，$I^{ij} \to$ 質量 m, $\omega_j \to$ 速度 v_j, $N^i \to$ 力 F^i という類似で，もとのニュートン方程式に対応する．この式 (3.34) の dI^{ij}/dt は，式 (3.30) を用いて，再び I^{ij} で書ける．結局 6 個の変数 $\vec{X}\,(t)$，$\vec{W}\,(t)$ に対して，6 個の方程式 (3.26), (3.34) が得られた．剛体の運動は，これらの運動方程式によって決まる．

3.3 回転座標系での運動

今まで，力の働かない粒子が等速直線運動をする慣性系での議論をしてきた．非慣性系ではどうだろう？ 特に，慣性系から見て等速回転運動する座標系 $\vec{x}'$ を考えてみよう．この系には特別な擬ベクトル $\vec{\omega}$ があり，これは回転軸方向を向き，回転角速度に比例した大きさを持つ．この系での運動方程式は，今までと同じように運動量変化 $m\ddot{\vec{x}}'\,(t)$ に対して同じ属性を持った力を等値して作ることができるが，今の場合は特別なベクトル $\vec{\omega}$ があることに注意しよう．$\vec{\omega}$ の次元は (時間)$^{-1}$ である．力は，時間反転対称で [質量 · 距離 · 時間 $^{-2}$] の次元を持つベクトルでなければならない．したがって

$$m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F}' + c_1 m\vec{\omega}^2\vec{x}' + c_2 m\,(\vec{\omega}\cdot\vec{x}')\,\vec{\omega} + c_3 m\vec{\omega}\times\dot{\vec{x}}' \tag{3.35}$$

の形に限定される．$\vec{F}'\,(t)$ は外力，c_1, c_2, c_3 は無次元の定数である．もし $\vec{\omega}$ が

時間依存性を持っているなら，上の右辺には $c_4 m\vec{x}' \times d\vec{\omega}/dt$ の形の項が付加できる．右辺第 2, 3 項は遠心力，第 4 項はコリオリ力と呼ばれる．テンソルの変換性の議論だけからは，以上のように形は制限されるが係数までは決まらない．

では実際に係数を求めてみよう．回転系の座標 $\vec{x}'$ は，回転行列 R を用いて

$$\vec{x}' = R\vec{x} \tag{3.36}$$

によって非回転系の座標 $\vec{x}$ と関連している．式 (3.3) に，$\vec{x} = R^{-1}\vec{x}'$，$\ddot{\vec{x}} = \left(R^{-1}\right)^{\cdot\cdot}\vec{x}' + 2\left(R^{-1}\right)^{\cdot}\dot{\vec{x}}' + R^{-1}\ddot{\vec{x}}'$ を代入すると，

$$m\ddot{\vec{x}}' = R\vec{F} - 2R\left(R^{-1}\right)^{\cdot}\dot{\vec{x}}' - R\left(R^{-1}\right)^{\cdot\cdot}\vec{x}' \tag{3.37}$$

となる．具体的に R として例えば式 (2.49) の第 3 軸周りの回転をとって計算すると，式 (3.35) で，$\vec{F}' = R\vec{F}$，定数は $c_1 = 1$，$c_2 = -1$，$c_3 = -2$，となることがわかる．したがって第 2, 3 項を $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}')$ とまとめることもできる．

$$m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}'. \tag{3.38}$$

問題 29　式 (3.35) の付加項 $c_4 m\vec{x}' \times d\vec{\omega}/dt$ の係数 c_4 を求めること．

問題 30　緯度 β にある Foucault 振り子の歳差周期は $\omega \sin\beta$．$R = R^{(2)}((\pi/2) - \beta)R^{(3)}(\omega t)R^{(2)}(\beta - (\pi/2))$ とする．

3.4　流れの記述—流体の自己同一性

最初の疑問に戻って，今度は水など連続体の流れを考えてみよう．今度は構成粒子がお互いの位置関係を変えていくので，前節の剛体と違って，構成要素の一つ一つの自己同一性が見えにくくなっている．水を構成する微粒子は時々刻々流れて位置を変えていく．この流れは，渦を作ったり，穴に吸い込まれていったり，波を作ったり，砕けたりするのであった．これらのパターンや運動をどう記述できるのだろうか？

まず，自己同一性を持ったある流体微粒子 a に着目できるとしよう．その粒子の占める場所 $\vec{x}$ は時間的にどんどん変化する：$\vec{x}(t)$．それぞれの微粒子を一意的にラベルするには，ある時刻 t_0 に全空間の各粒子にその位置座標 $\vec{q}$ を振っておけばいいだろう．そのラベルごとに上の運動が存在する：

$$\vec{x}\,(t, \vec{q}). \tag{3.39}$$

これは，先に述べたラグランジュ的記述（式 (1.12)）であり，ベクトル場となる．場に対するこの見方は，流れの実態（媒質）を強く意識している．$\vec{q}$ を一定にして $t \in \mathcal{R}$ を動かせば，これは特定の微粒子が空間内に作る 1 本の履歴線を表す（流跡線）．この流れを特徴付けるのは，まずその「流れの速度」である．この特定の微粒子が作る，水の流れの速度 $\vec{v}\,(t, \vec{q})$ は

$$\vec{v}(t,\vec{q}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{x}(t+\Delta t,\vec{q}) - \vec{x}(t,\vec{q})}{\Delta t} \right) \equiv \frac{\partial \vec{x}(t,\vec{q})}{\partial t} \Big|_{\vec{q}} \tag{3.40}$$

で表されるだろう．この速度ベクトル場は，粒子 $\vec{q}$ の流跡線の各点における接線を作る．

一方，各構成粒子の大域的な自己同一性を要求しないが，場全体の大局的な記述方法として，簡明に位置座標と時刻の関数として，流れの諸量 f を記述することもできた（オイラー的記述，式 (1.26)）：

$$f(t,\vec{x}). \tag{3.41}$$

例えば，流れの速度は f を速度 $\vec{v}$ と指定して，

$$\vec{v}(t,\vec{x}') \equiv \vec{v}(t,\vec{q}) \Big|_{\vec{x}(t,\vec{q})=\vec{x}'} \tag{3.42}$$

である．右辺は，左辺で指定された変数 $t, \vec{x}'$ を使って $\vec{x}(t,\vec{q}) = \vec{x}'$ の関係にある $\vec{q}$ を式 (3.40) で定義された $\vec{v}(t,\vec{q})$ に代入するという意味である．場に対するこのオイラー的な見方は，広がった媒質やその構成要素の大域的自己同一性を意識する必要がない．技術的には，以下に見るように両者の見方は単に変数変換で結びついているだけなのである．ラグランジュ的に見た時間を s と書く（独立変数 $\{s,\vec{q}\}$）と，

$$\begin{aligned} &\{t,\vec{x}'\} \Leftrightarrow \{s,\vec{q}\}, \\ &t = s,\ \vec{x}' = \vec{x}(s,\vec{q}) \end{aligned} \tag{3.43}$$

となる．例えば加速度は，合成関数のチェーン規則を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial s} \Big|_{\vec{q}} &= \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial x^i} \Big|_{x_i \text{以外}} \\ &= \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + v^i(t,\vec{x}) \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial x^i} \Big|_{x_i \text{以外}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

となる．これを略記して，

$$\frac{D\vec{v}(t,\vec{x})}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial t} + v^i(t,\vec{x}) \frac{\partial \vec{v}(t,\vec{x})}{\partial x^i} \tag{3.45}$$

あるいは，

$$\frac{Dv^i}{Dt} = \dot{v}^i + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \tag{3.46}$$

と記すことが多い．最後の項は $(\vec{v} \cdot \mathrm{grad})\vec{v}$ と書くことも多いが，テンソル構造が多少見にくくなる．

問題 31　式 (3.39) の表す流跡線に対して，オイラー的なベクトル場 (3.42) はどう関係しているだろうか？ 後者をどんどん “継ぎ足していく” と前者になるだろうか？ まず，1 本の曲線で，各点の接線が $\vec{v}(t,\vec{x})$ となる，という曲線を考えよう $(d\vec{x} \parallel \vec{v}(t,\vec{x}))$．定常流では？ 非定常流では？

3.5　流れの連続性—質量の保存

普通に水の流れなどを観察していて，もし吸い込み口も湧き出し口もがなければ，その流れの著しい性質は，「流体が増えないし，なくならない」という事実である．つまり，「質量は保存する」．これをテンソル解析の指針に沿って，物理的実在であれば見え方の系統的な規則に従うという方針で数式にまとめてみよう．質量が物理的実在に関する性質なら，この数式もテンソル形式で書かれるべきものである．

まず，ある時刻ある場所にどれだけ質量が集中しているかを表す量として，その流体の質量密度

$$\rho\,(t,\vec{x}) \tag{3.47}$$

を考えよう．これはスカラー量であり，任意の閉じた曲面 S の内側の，体積 V の領域にあるすべての流体の質量は

$$\int_V \rho\,(\vec{x},t)\,dV \tag{3.48}$$

である．質量の保存を言うとき，「この密度の時間変化は，外からの流入と流出の差であること」を表現すればよい．流れを表す量 $j\,(t,\vec{x})$ は，その時間その場所にある質量 $\rho\,(t,\vec{x})$ が空間的にどれだけ時間変動 $\vec{v}=d\vec{x}/dt$ するかだから，

$$j\,(\vec{x},t)=\rho\,(t,\vec{x})\,\vec{v} \tag{3.49}$$

で定義するのがよいだろう．これはスカラーとベクトルの積であり，ベクトル量である．目的のためには，スカラー $\dot{\rho}\,(t,\vec{x})\equiv\partial\rho\,(t,\vec{x})\,/\partial t$ をベクトル $j\,(t,\vec{x})$ で表せばよいのである．さらに，ρ は体積積分すると示量的な量になるスカラーなので，その表現も同様な量であるべきだ．可能な項の形は $\partial_i j^i$ しかなく，ρ や j の高次項の入る余地はない．また，$\mathrm{grad}\,\rho$ は時間反転対称性を破るので入ってこない．このようにして質量密度の時間発展は

$$\dot{\rho}=c+a\,\mathrm{div}\,\vec{j} \tag{3.50}$$

となる．ここで c,a は定数である．ただし，$c\neq 0$ なら，流れがなくとも密度があらゆる場所で一方的に増大または減少するので全く保存しなくなってしまう．したがって $c=0$ とおこう．また a は無次次元の定数であり，時間や空間，密度や速度の大きさの再定義に関われないはっきり決まった量である．

式 (3.50) を，座標に固定した体積 V にわたって積分すると，

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\,(\vec{x},t)\,dV=a\int_V \mathrm{div}\,(j\,(\vec{x},t))\,dV \tag{3.51}$$

となる．左辺は，V が座標に固定しているので，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\,(\vec{x},t)\,dV\right) \tag{3.52}$$

となり，体積 V 内の総質量 $\left(\int_V \rho(\vec{x},t)\,dV\right)$ の単位時間当たりの増分を表す．式 (3.51) の右辺は積分の定理 (2.191) から

$$a\int_S j(\vec{x},t)\cdot d\vec{f} \tag{3.53}$$

となり，もし $a=-1$ なら，これは単位時間当たりに面 S を通って流入するすべての流体の質量に等しい．これはまさに質量の保存の内容である．以上の考察から，質量保存の表現をまとめると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t)+\mathrm{div}\,(\rho(\vec{x},t)\,\vec{v})=0 \tag{3.54}$$

となる．

問題 32　ラグランジュ的に見ると，質量保存は単純に，

$$\frac{D}{Dt}(\rho\delta V_L)=0 \tag{3.55}$$

で表現される．$D\delta V_L/Dt=\mathrm{div}\,\vec{v}$ であることから，これは式 (3.54) の表現と同じである．

3.6　流れの運動方程式—因果律

個々の粒子（あるいは流体要素）に着目するので，座標に固定した領域でなく，ラグランジュ的な描像で考えよう．流体全体のうち，密度 ρ が一様とみなせるほどの微小領域 δV_L の中の流体要素はニュートンの運動方程式

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho\delta V_L v^i\right)=F^i \tag{3.56}$$

に従って運動する．この左辺は，$\rho\delta V_L$ は一定の質量なので，

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho\delta V_L v^i\right)=\rho\delta V_L\frac{Dv^i}{Dt}=\rho\delta V_L\left(\dot{v}^i+v^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) \tag{3.57}$$

と書ける．この流体要素に働く力 F^i は，圧力 p だったり，重力加速度 $\vec{g}$ による力であったり摩擦などの散逸的な力だったりする．考えている微小領域表面 S に働く圧力 p を総計すると，この微小体積 δV_L に働く力になる

$$-\int_S p\,df_i. \tag{3.58}$$

この負符号は，df_i が領域 δV_L の外向きに正，と定義しているから．これを体積積分に書き直すと，式 (2.191) から，

$$-\int_{\delta V_L}(\partial_i p)\,dV \tag{3.59}$$

となる．重力は，重力加速度ベクトルを g^i として，

$$g^i\int_{\delta V_L}\rho(\vec{x})\,dV \tag{3.60}$$

となる．ニュートンの運動方程式を具体的に書くと，$\delta V_L \to 0$ の極限をとって，

$$\rho\left(\dot{v}^i + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = -\partial^i p + g^i \rho \tag{3.61}$$

となる．実際には，流体は多体系なので一般には散逸的な力が働く．この力はベクトルであり，散逸性を表現するために時間反転対称性を破るものである．最も簡単な形は速度場 v^i について 1 次である．しかし散逸は速度だけが一様にあっただけでは働かず，非一様性が必要になるはずだ．そのような項は，$\nabla \operatorname{div} \vec{v}$, $\varDelta\vec{v}$ が可能であるが前者は圧力 p に吸収できるのでそうしよう．したがって一般に流体の運動方程式は

$$\rho\left(\dot{v}^i + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = -\partial^i p + g^i \rho + \mu \varDelta v^i \tag{3.62}$$

となる．μ は粘性係数と呼ばれ，この方程式はナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式と呼ばれる．非等方性を許せば，散逸を表す ${\mu^i}_j \varDelta v^j$ の形の項もありえる．

3.7 流れの発散や回転の時間変化

流体の流れを表す速度ベクトル場 $\vec{v}\,(t,\vec{x})$ の様相を見てみよう．これが場所 $\vec{x}$ に依存せず一様なら何の構造もない．$\vec{v}\,(t,\vec{x})$ が場所場所でどう変化するのかが流れの構造を決める．例えば式 (3.46) に現れる量 $\partial v^i/\partial x^j$ は，点 $\vec{x}$ と点 $\vec{x}+\delta\vec{x}$ における速度の差

$$\frac{v^i\,(t,\vec{x}+\delta\vec{x}) - v^i\,(t,\vec{x})}{\delta x^j} \tag{3.63}$$

であり，局所的な変形である．つまり，流体が膨張・収縮したり，ひずんだり，回転したりする度合いであり，流れをミクロに特徴付ける重要な 2 階のテンソル場である．

特に，テンソル量 $\partial v^i/\partial x^j \equiv {v^i}_{,j}$ から作られるスカラー場として $\theta \equiv \partial v^i/\partial x^i = \operatorname{div}\vec{v}$，ベクトル場として $\varepsilon_{ijk}\partial v^k/\partial x_j \equiv \mathrm{rot}\vec{v}$ がある．全体を系統的に 3 成分に分解してみよう．つまり，

$$\theta \equiv {v^i}_{,i}\,, \tag{3.64}$$

$${\sigma^i}_j \equiv \frac{{v^i}_{,j} + {v^j}_{,i}}{2} - \frac{1}{3}\theta{\delta^i}_j\,, \tag{3.65}$$

$${\omega^i}_j \equiv \frac{{v^i}_{,j} - {v^j}_{,i}}{2} \tag{3.66}$$

である．θ と ${\sigma^i}_j$ は ${v^i}_{,j}$ の対称成分であり，それぞれ 1, 5 個の自由度を持っている．2.13 節の最後で考察したとおりスカラー θ は体積膨張であり，湧き出しや吸い込み（源）を表す．対称テンソル ${\sigma^i}_j$ は定積変形，つまり歪みを表す．${\omega^i}_j$ は 3 個の自由度を持つ反対称成分であり，式 (2.104) と式 (2.106) が同等であっ

たのと同じ意味で $\mathrm{rot}\vec{v}$ と同等である．したがってこれらは回転・渦を表す．これらを用いて $v^i{}_{,j}$ は,

$$v^i{}_{,j} = \sigma^i{}_j + \omega^i{}_j + \frac{1}{3}\theta\delta^i{}_j \tag{3.67}$$

と分解できる．流れの式 (3.62) を用いると，それぞれの時間発展方程式が得られる．θ に対する，流れに沿っての時間発展方程式（Raychoudhri 方程式）は，粘性がなければ $(\mu = 0)$,

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\frac{1}{3}\theta^2 + \omega^2 - \sigma^2 + \rho^{-2}\left(\vec{\nabla}\rho\right)\cdot\left(\vec{\nabla}p\right) - \rho^{-1}\Delta p + \vec{\nabla}\cdot\vec{g} \tag{3.68}$$

となる．ただし,

$$\sigma^2 \equiv \sigma^i{}_k\sigma^k_i > 0, \quad \omega^2 \equiv -\omega^i{}_k\omega^k_i > 0 \tag{3.69}$$

と定義した．同様に，粘性がなければ $(\mu = 0)$，ベクトル $\omega^i \equiv \varepsilon^{ijk}\omega_{jk}$ に対して,

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -2\theta\vec{\omega} + \rho^{-2}\left(\vec{\nabla}\rho\right)\times\left(\vec{\nabla}p\right) + \mathrm{rot}\vec{g} \tag{3.70}$$

となる．ポテンシャル力であれば $\mathrm{rot}\vec{g}$ の項は消える．これらは流線に沿っての流れの発散や回転の時間変化を与える基礎方程式である．

問題 33　流線に沿って，$\sigma^i{}_j$ の時間発展はどうなるか？

問題 34　流線に沿って，θ や $\vec{\omega}$ の時間発展の各項が実際どのような物理的過程と関わっているだろうか？

3.8　音波

流体の特性は，湧き出し・吸い込みや渦だけだろうか？ エネルギーや運動量は流れに乗って伝播するだけだろうか？ 実際には，空気中でも水中でも，一般に「音」という存在形態があって，これはエネルギーや運動量を運ぶ．この音の伝播，つまり音波を考えてみよう．

基本方程式 (3.62), (3.54) に戻ろう．式 (3.62) の左辺第 2 項のために基礎方程式は $\vec{v}$ に関して非線形であり，その複雑さゆえにその解に対して一般論はない．このような場合に対処するいつもの方法は，せめて小さな変動がどう伝播するのか考えることである．これなら線形の範囲で考察できる．具体的には,

$$\rho(t,\vec{x}) \to \rho_0 + \rho_1(t,\vec{x}), \tag{3.71}$$

$$p(t,\vec{x}) \to p_0 + p_1(t,\vec{x}), \tag{3.72}$$

$$\vec{v}(t,\vec{x}) \to \vec{v}_0 + \vec{v}_1(t,\vec{x}) \tag{3.73}$$

とおいて，定常な状態 $\#_0$（ここで $\#$ は $\rho, p, \vec{v}$）からの微小なずれ $\#_1(t,\vec{x})$ の運動を考えることである．簡単のために，流体の静止状態 $(\vec{v}_0 = 0)$ で，外力や

摩擦がない場合 ($g = 0,\ \nu = 0$) を考えよう．これでも変数の数 5 は方程式の数 4 より 1 つ多い．このため通常，圧力と密度が単純に相関する状況を考える：$p = h(\rho)$．これは究極的には構成物質の微視的な性質から導かれるはずのものであり，状態方程式と呼ばれる．上式を式 (3.62), (3.54) に入れると，

$$\dot{\rho}_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \tag{3.74}$$

$$\rho_0 \dot{\vec{v}}_1 + \sigma^2 \operatorname{grad} \rho_1 = 0 \tag{3.75}$$

となる．ただし，$\sigma \equiv \sqrt{h'(\rho_0)} = \sqrt{dp/d\rho\,(\rho_0)}$ はあまり場所によらないと仮定した．これらから $\vec{v}_1$ を消去すると，

$$\ddot{\rho}_1 - \sigma^2 \Delta \rho_1 = 0 \tag{3.76}$$

となる．これの典型的な解 $\rho_1(t, \vec{x})$ は，x^2, x^3 方向には一様性を仮定して x^1 方向にだけ変動するという平面波である．この解は，$f(x)$ を任意関数として

$$\rho_1(t, x) = f(x \pm \sigma t) \tag{3.77}$$

となる．これは速度 σ で $\mp x$ 方向に伝播する波を表す．さらに式 (3.75) から，速度変化の方向は密度変化の方向 ($\operatorname{grad} \rho_1$) であり，したがってこの波は疎密波，つまり縦波である．音波は流体を構成する粒子の流れではなく，力 $\operatorname{grad} p$ によるパターンの伝播であるが，音波によって，エネルギーや運動量は速やかに運ばれる．

3.9　2 次元の流れ

前の章で，ベクトル場を決めるものは何かという問題を考えて，式 (2.226) を見出した．簡単のために思い切って 2 次元に話を限って，これを再考してみよう．つまり変数は $\vec{x} = (x^1, x^2)$, $\vec{v} = (v^1, v^2)$ などである．そして $\partial/\partial x_3 \to 0,\ v^3 \to 0$ とする．3 次元空間では流れ $\vec{v}$ に渦がないとき，$\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ だから，$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ となるスカラー場 $\phi(\vec{x})$ がある．2 次元であれば，$\operatorname{rot} \vec{v}$ は第 3 成分だけが残り，そして

$$v^1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad v^2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \tag{3.78}$$

である．さらに流体が非圧縮性の場合，3 次元では $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ だから，$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{B}$ なるベクトル場 $\vec{B}$ がある．2 次元では第 3 方向への微分はないので，$\psi = B^3$ として，

$$v^1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{3.79}$$

と簡単になる．$\psi(x^1, x^2)$ は流線関数，$\phi(x^1, x^2)$ はポテンシャル関数と呼ばれる．両式 (3.78), (3.79) を並べて書くと，これは複素数 $z = x^1 + ix^2$ を変数とする複素関数

$$w = \phi + i\psi \tag{3.80}$$

に対するコーシー・リーマンの関係式そのものになっている．したがって 2 次元複素スカラー場 $w(\vec{x})$ は，複素数変数 $z \equiv x + iy$ に対する解析関数である：$w(z)$．ついでに両式 (3.78), (3.79) をもう一度微分すると，ϕ も ψ も調和関数であること，つまり

$$\Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial (x^2)^2} = 0 \tag{3.81}$$

であることがわかる．ラプラシアン表記 Δ は 3 次元のものを 2 次元でも使おう．

以上のことから，任意の解析関数は 2 次元の流れを 1 つ決める．例えば，

1. $w(z) = \alpha z$ の場合 $(\alpha \in \mathcal{C})$ は，

$$\vec{v} = (\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\alpha) \tag{3.82}$$

となる．速度が一定なので一様流となる．

2. $w(z) = \alpha \ln z$ の場合 $(\alpha \in \mathcal{C})$ は，$z = re^{i\theta}\ (r, \theta \in \mathcal{R})$ と書いて，

$$\vec{v} = (\mathrm{Re}\,\alpha)\, r^{-1} (\cos\theta, \sin\theta) + (\mathrm{Im}\,\alpha)\, r^{-1} (\sin\theta, -\cos\theta) \tag{3.83}$$

となる．$(\mathrm{Re}\,\alpha)$ に比例する項は，速度が動径方向で，大きさが r だけの関数なので，等方的な湧き出し $(\mathrm{Re}\,\alpha > 0)$，あるいは吸い込み $(\mathrm{Re}\,\alpha < 0)$ のある流れを表す．$(\mathrm{Re}\,\alpha)$ の大きさはこの源の規模を特徴付ける．$(\mathrm{Im}\,\alpha)$ に比例する項は，速度が動径方向に垂直で，大きさが r だけの関数なので，等方的な渦のある流れを表す．$\mathrm{Im}\,\alpha$ の正・負は，それぞれ右・左巻きの渦を表し，$\mathrm{Im}\,\alpha$ の大きさは渦の規模を特徴付ける．

3. $w(z) = \alpha / z$ の場合 $(\alpha \in \mathcal{C})$ は，

$$\vec{v} = -(\mathrm{Re}\,\alpha)\, r^{-2} (\cos 2\theta, \sin 2\theta) + (\mathrm{Im}\,\alpha)\, r^{-2} (-\sin 2\theta, \cos 2\theta) \tag{3.84}$$

となる．これは $\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ を含むので，双極的な流れになっている．

以上のように，源と渦は，特異点や分岐線に存在する．複素関数論には次の定理があった：

全複素平面で有界な正則関数は定数である[*3]．

したがって，2 次元の流れは，やはり源と渦，つまり対応する解析関数の特異点や分岐線が決めていることになる．

問題 35　ϕ 一定の線と ψ 一定の線は直交する．

問題 36　真性特異点では何が起こっているのだろうか？

---

*3 このことは式 (2.217) 以下で議論したことに対応している．

3.10 拡散方程式

さて，一般の分布関数 $f(t,\vec{x})$ の時間発展を考えよう．例えば局所的に熱せられた物体に熱が流れ，各点各時刻ごとに温度が付与できる場合，その総体は温度の場として現される．そのような場合には，$f(t,\vec{x})$ は実数のスカラー場である．さらに，激しい熱化によって波が励起されるようなことがなく，日常よく観察されるようなおとなしく物理量が変化する場合には，その方程式は時間1階の微分方程式で表されるであろう．そして，この方程式が物理的実在に対する系統的な記述であるならば，$\partial f(\vec{x},t)/\partial t$ はスカラー場である量によって規定されていくべきである．それはつまり，$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ を実定数として

$$\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}=\alpha f(\vec{x},t)+\beta\left(\vec{\nabla}f(\vec{x},t)\right)^2+\gamma\Delta f(\vec{x},t)+\delta\Delta^2 f(\vec{x},t)+\varepsilon f(\vec{x},t)^2\cdots \tag{3.85}$$

と書ける．α の項は再定義 $f(\vec{x},t)e^{\alpha t}\to f(\vec{x},t)$ で分布関数に吸収できるから不要であり $\alpha=0$．β,ε の項は $f(\vec{x},t)$ に関して非線形であり，（実験結果と整合する重ねあわせを成立させるために）線形性を要求すれば $\beta=0$, $\varepsilon=0$ などとなる．また δ の項は空間の4階微分にもなり，簡単な方程式とは言えない．我々はまず簡単な基礎方程式から吟味していこう．必要があればここに立ち戻って，次に複雑な項も考察の対象にしていけばよいだろう．このようにして結局，線形の最も簡単な方程式は

$$\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}=\gamma\Delta f(\vec{x},t) \tag{3.86}$$

となる．定数 $\gamma=D$ は次元 [長さ ^{2} 時間 $^{-1}$] を持ち拡散係数と呼ばれる．この形の方程式は多くの系に対して良い記述を与える．もっと一般の式 (3.85) は，Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ばれ，現象論的にパターン形成の物理を記述する．

3.11 シュレーディンガー方程式

ミクロの世界を記述する量子力学を考えよう．ここでは，古典的な（局在した）粒子という描像では決して説明できない干渉現象が起こっていた．したがって，光や電子などの粒子は，まず波である，という認識に至ったのであった．それが時間に依存した空間の上の波であるとするならば，それは場として記述される．いろいろな可能性があるが最も簡単な場合から考え始めよう．そしてこれをスカラー場 $\Psi(t,\vec{x})$ と記そう．これはどんな性質を持った場なのか初めからわからないので一般に複素数と考えておこう．これは実数では2変数なので，上の分布関数と同じように時間1階の微分方程式を作っても波が伝播する力学的様相を含むことができる（実質的には時間2階の微分方程式）．このように考えて $\Psi(t,\vec{x})$ の時間発展方程式を考えると可能な形は，α,β,γ などをスカラー

として，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \Psi + \beta \Delta \Psi + \gamma \left(\vec{\nabla} \Psi\right)^2 + \delta \Delta^2 \Psi + \varepsilon \Psi^2 \cdots \tag{3.87}$$

となる．$\Psi(t, \vec{x})$ が普通の波と同じように重ねあわせ可能であれば，これは線形の方程式であるべきであるがこのことは前提として仮定しよう[*4]．したがって $\gamma = 0, \varepsilon = 0$ などとなる．

一般に上の分布関数は時間の経過とともに散逸してしまう．一方今は，散逸のない力学の基礎方程式を考えているので，粒子が時間の経過とともになくなってしまわないことを表現する何らかの保存則が存在すべきである．最低次の重要な項だけを残して，$\Psi^\dagger$ (式 (3.87)) + (式 (3.87))† Ψ を作れば，

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} &= 2 (\mathrm{Re}\,\alpha) |\Psi|^2 + (\mathrm{Re}\,\beta) (\Psi^* \Delta \Psi + \Psi \Delta \Psi^*) \\ &\quad + i (\mathrm{Im}\,\beta) \partial^i (\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*) \\ &\quad + \delta \Psi^* \Delta^2 \Psi + \delta^* \Psi \Delta^2 \Psi^* \end{aligned} \tag{3.88}$$

となる．したがって，$\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, $\mathrm{Re}\,\beta = 0$, $\delta = 0$ で，さらに $\mathrm{Im}\,\beta$ が $\vec{x}$ に依存していなければ，保存則

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} - i (\mathrm{Im}\,\beta) \partial^i \left(\Psi^\dagger \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^\dagger\right) = 0 \tag{3.89}$$

が導かれる．このようにして式 (3.87) を，$\mathrm{Im}\,\alpha \to -V/\hbar$, $\mathrm{Im}\,\beta \to \hbar/(2m)$ と書き直すと，

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi \tag{3.90}$$

となる．m は考えている粒子の質量である．この方程式はシュレーディンガー方程式と呼ばれ，ミクロ世界を記述する基礎方程式である．右辺最終項の V は時間空間の関数 $V(t, \vec{x})$ でも，上記保存則の成立には関わらないので，かまわない．またここで，$\hbar$ はこの方程式に現れる唯一の普遍的パラメターであり，“（エネルギー）×（時間）”の次元を持つ定数である．実験から

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} [\mathrm{J \cdot sec}] \tag{3.91}$$

と測定されている．この量はプランク定数と呼ばれミクロ世界にはあらゆる場面で登場し，あまりに頻繁に出現するので，$\hbar = 1$ とする単位系がよく使われる．ここまで $\Psi(t, \vec{x})$ は時間に関して 1 階の微分方程式としてきたが，その $\Psi(t, \vec{x})$ が複素数であることによって，実質 2 階の微分方程式と考えられ，$\Psi(t, \vec{x})$ は波の性質を持って遠方まで伝播する．このことは実際，式 (3.90) を，$\Psi = \Psi_{\mathrm{re}} + i \Psi_{\mathrm{im}}$ と分解して書いてみると確認できる．

上の保存則 (3.89) は，スカラー場とベクトル場を

[*4] 実際にそうであることが実験からわかっている．

$$\rho \equiv |\Psi|^2, \quad \vec{J} \equiv \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^\dagger \vec{\partial} \Psi - \Psi \vec{\partial} \Psi^\dagger\right) \tag{3.92}$$

と定義すると，

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\, \vec{J} = 0 \tag{3.93}$$

という形に整理できる．この保存則は無条件に成り立つので，粒子の存在を特徴付ける非常に基本的な保存則を表していると考えられる．複素関数 $\Psi(t, \vec{x})$ を，2 つの実関数 $R(t, \vec{x})$，$S(t, \vec{x})$ を導入して

$$\Psi = Re^{iS} \tag{3.94}$$

と分解した形で書くと，$\rho(t, \vec{x}) = R(t, \vec{x})^2$ は正定値なので，粒子の分布確率関数であると解釈できるだろう．すると，$\vec{J}(t, \vec{x})$ は存在確率の流れである．上に見たように，時間の反転 $t \to -t$ に際し，運動方程式 (3.90) が不変であるためには，同時に，波動関数は $\Psi \to \Psi^*$ と変換する必要がある．このことは流れ $\vec{J}$ が時間反転で符号を変えることとも整合する．

一方，式 (3.90) から $\vec{v} \equiv \hbar \vec{\nabla} S(t, \vec{x}) / m$ に対する式を書くことができて，

$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2mR}\Delta R\right) = 0 \tag{3.95}$$

を得る．一般のベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ に対して成立する問題 22 にある公式

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) + \vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \tag{3.96}$$

を，$\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ として使って変形すると，今の場合 $\vec{\nabla} \times \vec{v} \propto \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} S = 0$ なので，

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} V}{m} + \vec{\nabla}\left(\frac{\hbar^2}{2m^2 R}\Delta R\right) \tag{3.97}$$

という形になる．これは粘性のないナビエ・ストークス方程式 (3.62) であり，オイラー方程式と呼ばれる．すると，右辺第 1 項

$$\frac{-\vec{\nabla} V}{m} \tag{3.98}$$

は単位質量あたりに働く力であるので，V はポテンシャルでなければならない．また，余分な圧力のように働く項

$$p_Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m^2 R}\Delta R \tag{3.99}$$

が存在する．これは $\hbar \to 0$ で消えてしまうので，ミクロな世界に特徴的で普遍的な圧力であるとわかる．また，$1/\sqrt{\Delta R / R}$ は $\Psi(t, \vec{x})$ の空間的広がりの程度を表し，これが小さくなる（つまり小領域に閉じ込められる）と，大きな圧力 p_Q で押し返そうとする働きをする．これが量子論の不確定性原理である．一般に閉じ込めようとする引力 $(\vec{\nabla} V > 0)$ と反発する圧力 p_Q がバランスして，安

定な基礎構造をミクロに作る．これら基礎的要素がたくさん集合してマクロな構造物を構成していく．

一方，式 (3.95) から，ミクロな世界では付加的なポテンシャル

$$V_Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2mR}\Delta R \tag{3.100}$$

が働いているとみることもできる．量子の世界では，古典的粒子が透過不可能なポテンシャル V でも，わずかながら透過する確率が存在する（量子力学のトンネル効果）のだが，このことはこの付加的ポテンシャルによってもとのポテンシャルが変更され，対応する古典的な粒子は非常にゆっくりとではあるが進むことができる，と解釈できる．

問題 37　陽子と電子がお互いのクーロン力で結合する系のサイズはおよそどれぐらいだろうか？

問題 38　式 (3.90) 右辺に非線形項 $|\Psi|^2\Psi$ を加えた式は，マクロなボーズ・アインシュタイン凝縮体の運動を記述する．この場合に，保存則や時間反転対称性はどうなるだろうか？

問題 39　分解 (3.94) の W に対しては式 (3.97) を得た．R に対してはどうなるか．

3.12　電磁場と荷電粒子の系（1）

電磁相互作用する系を考えよう．電場 $\vec{E}\,(t,\vec{x})$ の中で荷電粒子に働く力 $\vec{F}_e\,(t,\vec{x})$ はベクトル量である．これは，q を定数として

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \tag{3.101}$$

と書ける．ここで q は電荷と呼ばれ荷電粒子を特徴付ける量である．むしろこの法則によって，測定された力から電場が定義される．近接作用の基本的な考え方に則って導入された電場 $\vec{E}\,(t,\vec{x})$ そのものは，他の荷電粒子，あるいはもっと一般に電荷密度 $\rho\,(t,\vec{x})$ から作られるはずである．この電場の表式を考えよう．電荷密度 $\rho\,(t,\vec{x})$ はスカラー量で，かつその存在自身が（微分なしで）電場の源になる．したがって $\rho\,(t,\vec{x})$ は，電場 $\vec{E}\,(t,\vec{x})$ から作られるスカラー量と等置されるべきものである．可能なスカラー量は，$\vec{E}\cdot\vec{E}$，または $\mathrm{div}\,\vec{E}$ である．ただし，電荷 ρ が 2 倍になったら，電気力，従って電場 $\vec{E}$ も単純に 2 倍になるだけなので，前者ではありえない．重ねあわせの原理が成り立つことは実験事実である．このように，電場の表式は

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \alpha\rho \tag{3.102}$$

と決まる．この関係はガウスの法則と呼ばれ，定数 α は実験から求まる．MKSA 単位系では真空中で

$$\alpha = 1/\varepsilon, \tag{3.103}$$

$$\varepsilon = 8.854 \times 10^{-12} \left[\frac{\mathrm{A}^2\,\mathrm{sec}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right] \tag{3.104}$$

と定義される．ε は（真空の）誘電率と呼ばれる．

同様に磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ も考えたい．磁場は輪電流に垂直正方向に作られる．したがって空間反転操作 P に対して，電場 E とは異なって，符号を変えない．つまり磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ は擬ベクトルである．さらに磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ は時間反転に対して，電流の向きも変わるので，符号を変える．磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ の中で荷電粒子に働く力 $\vec{F}_m(t,\vec{x})$ はベクトル量である．従って，それを擬ベクトル $\vec{H}(t,\vec{x})$ だけでは構成できず，もう 1 つのベクトルとの外積をとるしかない．相互作用に関与する自由度のもう 1 つのベクトルとは荷電粒子の速度場であり，従って

$$\vec{F}_m = c_1 \vec{v} \times \vec{H} \tag{3.105}$$

と書ける．速度 $\vec{v}$ でなく加速度 $\vec{w}$ や位置 $\vec{x}$ をとることもできそうだが，そうすると，ミクロの基礎方程式に要求される時間反転対称性を破ってしまう．ここで c_1 は定数であり，これは電荷 q に比例するので $c_1 = q\mu$ と書く．μ は真空の透磁率と呼ばれ実験から決まる定数である．

この磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ そのものは，何らかの源に由来する．荷電粒子に由来する電場と違って，単独の磁荷は実験的に存在しない．従って，この事実は，磁場の表式

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \tag{3.106}$$

を与える．

上の式 (3.101), (3.105) をまとめると，力はベクトルとして足されるので電磁場の中で運動する荷電粒子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\left(\vec{E} + \mu\vec{v} \times \vec{H}\right) \tag{3.107}$$

となる．この右辺はローレンツ力と呼ばれ，与えられた電磁場の中での荷電粒子の運動を決める．

また電荷は厳密に保存することが実験から知れているので，このことを表現しておくと，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{i} = 0 \tag{3.108}$$

となる．$\vec{i}(t,\vec{x})$ は電流密度である．

一方，荷電粒子たちの運動，つまり電荷密度分布 $\rho(\vec{x},t)$ と電流密度 $\vec{i}(\vec{x},t)$，が与えられたときの電磁場を決める法則がある．電場と磁場は相互に絡まりあって時間発展する．まず電場の時間発展 $\partial\vec{E}/\partial t$ を考えてみる．$\partial\vec{E}/\partial t$ はベクトル場なので，擬ベクトル場 $\vec{H}$ は $\mathrm{rot}\vec{H}$ としてベクトルを構成してこれに寄与するしかない．また擬ベクトルとなってしまう $\mathrm{rot}\vec{E}$ は寄与しえない．その他，ベ

クトル場である電流密度 $\vec{i}$ は寄与しうる．これらは時間反転対称性とも整合している．この視点から，時間反転で符号を変えない $\vec{\nabla}\rho$ は寄与しえない．結局，電場 $\vec{E}(\vec{x},t)$ の時間発展は

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \alpha \mathrm{rot}\vec{H} + \beta \vec{i} \tag{3.109}$$

という形で規定されることになる．さらに，式 (3.102) が常に成り立っていなければならないという整合性，および式 (3.108) から，$\beta = -1/\varepsilon$ がわかる．同時に，初期に式 (3.102) が成立すれば，以降ずっと成立することも保障される．

同様に磁場の時間発展 $\partial\vec{H}/\partial t$ を決めてみよう．$\partial\vec{H}/\partial t$ は擬ベクトル場なので，ベクトル場 $\vec{E}$ は $\mathrm{rot}\vec{E}$ として擬ベクトル場を構成して寄与するしかない．ベクトル場である $\vec{i}$ や $\vec{\nabla}\rho$ はそのままでは寄与できない．しかし，$\mathrm{rot}\nabla\rho$ は存在しないし，$\mathrm{rot}\vec{i}$ は時間反転対称性を破るから寄与しえない（$\partial\vec{H}/\partial t$ や $\mathrm{rot}\vec{E}$ は時間反転操作によって符号を変えない）．結局，磁場 $\vec{H}(\vec{x},t)$ の時間発展は

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \alpha' \mathrm{rot}\vec{E} \tag{3.110}$$

という形で規定されることになる．残りの係数も実験から決められ，$\alpha = 1/\varepsilon$, $\alpha' = -1/\mu$ となる．ここで，μ は（真空の）透磁率である．さらに，この式の両辺に div を作用させれば，初期に式 (3.106) が成立すれば，以降ずっと成立することが保障される，ことがわかる．4 つの式 (3.102), (3.106), (3.109) および (3.110) はマックスウェルの方程式と呼ばれ，電磁場を決定する基礎方程式である．

式 (3.109), (3.110) から，電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$ に対して真空中では，

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta\vec{E} \tag{3.111}$$

がでてくる．これは伝播する波を表し，その真空中の進行速度 $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ の実験からの数値は光速度 c と一致する：$c^2\varepsilon\mu = 1$．磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ も波として伝播し電場と同様である．したがって光は電磁波であると推測される．MKSA 単位系では

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\right] \tag{3.112}$$

と定義される．

電磁場 $\vec{E}, \vec{H}$ などのベクトル場をもっと基本的に決めるものは何か考えてみよう．まず式 (3.106) から，式 (2.206) によると，ベクトル場 $\vec{A}(t,\vec{x})$ が存在して，磁場 $\vec{H}(t,\vec{x})$ は

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{3.113}$$

と表される．これと式 (3.110) をあわせると，

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{1}{\mu}\vec{E} - \dot{A}\right) = 0 \tag{3.114}$$

なので，式 (2.199) によると，スカラー場 $\phi(t,\vec{x})$ が存在して，$-\frac{1}{\mu}\vec{E}-\dot{A}$ は $\mathrm{grad}\,\phi$ として，つまり

$$\frac{1}{\mu}\vec{E}=-\,\mathrm{grad}\,\phi-\dot{A} \tag{3.115}$$

と表される．式 (3.113), (3.115) に現れるベクトル場 $\vec{A}(t,\vec{x})$, スカラー場 $\phi(t,\vec{x})$ はそれぞれベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルと呼ばれる．

以前，式 (2.207) のところで考察した事情と同様，これらポテンシャルは一意には決まらず，任意関数 $g(t,\vec{x})$ を導入して

$$\vec{A}'=\vec{A}+\mathrm{grad}\,g, \tag{3.116}$$

$$\phi'=\phi-\dot{g} \tag{3.117}$$

と変更しても，式 (3.113), (3.115) で決まる電磁場は不変である．この自由度を使って，以前のように

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=0 \tag{3.118}$$

を要請して式を簡略化することもできる．式 (3.116), (3.117) をゲージ変換といい，式 (3.118) の特別な要請をクーロンゲージという．これに限らず問題に即した便利なゲージを選んで計算を簡略化できる．このような技術的な側面だけでなく，逆にゲージ変換不変性を「実在の原理」として採用することによって，素粒子物理学における基礎方程式の発見が著しく進んだ．これは我々が回転不変性を「実在の原理」として採用することによって今議論を進めていることと基本的な考え方は同じである．このことは最終章で再考しよう．

今度は誘電物質中の電磁場を考えよう．一般の場合はたくさんの荷電粒子と電磁場が作る多体問題となり手に負えない．そこで，場があまり強くなく，そしてあまり速く変動しない場合に限って考えてみよう．すると，電場 $\vec{E}_0$ が誘起した荷電粒子の偏りによる 2 次的な電場 $\vec{P}$ はその原因となった電場 $\vec{E}$ に比例するであろう．したがってもとの場と誘起された場とをあわせた全電場は $\vec{E}$ を補正して

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0+\vec{P}=\varepsilon'\vec{E} \tag{3.119}$$

を定義する[*5]．同様に，磁場 $\vec{B}_0$ が誘起した双極磁場の偏りによる 2 次的な磁場 $\vec{M}$ はその原因となった磁場 $\vec{H}_0$ に比例するであろう．従ってもとの場と誘起された場とをあわせた全磁場 $\vec{H}$ を補正して

$$\vec{B}\equiv\mu_0\vec{H}_0+\vec{M}=\mu'\vec{H} \tag{3.120}$$

を定義する．従って上で得られた電場磁場に対する方程式は，真空中の ε,μ に

[*5] 誘起された場 $\vec{P}$ がもとになって再び新しい場をどんどん誘起していくはずである．それらすべてを含めた量として $\vec{D},\vec{E}$ を定義している．

対して補正分を繰り込んで，物質中の誘電率，透磁率を

$$\varepsilon \to \varepsilon', \quad \mu \to \mu' \tag{3.121}$$

と再定義すれば，形式的に真空中と同じ方程式が成り立つ．これらは

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E}, \tag{3.123}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho, \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H} - \vec{i} \tag{3.125}$$

とまとめられ，媒質中のマックスウェル方程式と呼ばれる．ローレンツ力の式とマックスウェル方程式は連立して，電磁場と荷電粒子の運動を完全に決める基礎方程式となる．ただし，媒質中にある場合の ε', μ' は現象論的な係数であり，物質や状態によって異なる．

問題 40　電気力線と磁力線を定義しよう．電場 $\vec{E}(t, \vec{x})$，磁場 $\vec{H}(t, \vec{x})$ からどのように構成したらよいか．

問題 41　式 (3.102) および式 (3.106) から，電気力線は電荷に端点を持つこと，磁力線は閉じていることを導くこと．

3.13 エネルギー運動量

先ほど見たように，電磁場は波動として空間を伝播する物理的実在である．実在の波動であれば，その自己同一性を保障するエネルギーや運動量などの保存量を持っているはずである．これを考えてみよう．真空中において電磁場と荷電粒子からなる系を考えよう．エネルギー密度およびエネルギー流としては，それぞれスカラー量およびベクトル量でなければならない．波の場合，エネルギー密度は一般に振幅の 2 乗である．そのような，電場と磁場から作られる最も簡単なスカラー量，ベクトル量はそれぞれ $\alpha\vec{E}^2 + \beta\vec{H}^2$, $\gamma\vec{E}\times\vec{H}$ である．係数 α, β, γ は，マックスウェル方程式 (3.102), (3.106), (3.109) および (3.110) とローレンツの式 (3.107) から保存するように構成するとよいだろう．具体的には，式 (3.109) に $\vec{E}$ をかけ，式 (3.110) に $\vec{H}$ をかけて足せば，$\alpha\vec{E}^2 + \beta\vec{H}^2$ の時間変化を与える表式が得られる．このように，上の量の間には，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right) + \mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = 0 \tag{3.126}$$

という関係があることがわかる．これから，電磁場のエネルギー密度 ρ_{em} は

$$\rho_{em} = \frac{\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2}{2} \tag{3.127}$$

であり，電磁場のエネルギー流 $\vec{J}_{em}$ は

$$\vec{J}_{em} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{3.128}$$

であると考えると保存則と整合することがわかる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{em} + \rho_p\right) + \operatorname{div} \vec{J}_{em} = 0. \tag{3.129}$$

ここで，

$$\rho_p = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 \tag{3.130}$$

は荷電粒子の運動エネルギーである．電磁場のエネルギー流を表す $\vec{J}_{em}$ はポインティングベクトルと呼ばれる．

さらに運動量も保存すると考えられる．運動量密度は $\vec{E} \times \vec{H}$ である．電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ から作られる最も簡単な3次元の2階テンソルは電磁場の運動量流の候補である：$\alpha E_\mu E_\nu$, $\beta H_\mu H_\nu$, $\gamma\delta_{\mu\nu}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu\right)$．係数 α, β, γ は，マックスウェル方程式とローレンツの式から保存するように構成するとよい．この問題はのちほど相対論の章で，もっと系統的に議論しよう．

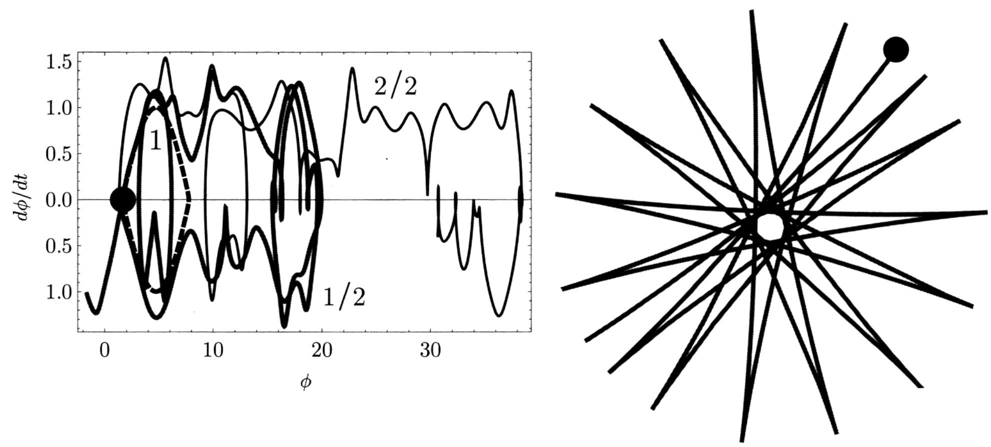


図 3.1

左：2重振り子の位相図．1端を固定した長さ l_1 の棒の他端に質量 m_1 の質点を付け，それに，長さ l_2 の棒の1端を接続する．その棒の他端には質量 m_2 の質点を付けて，全体を振動させる．こんな簡単な系でも図にあるような複雑な運動をする．太線の軌跡 1/2 は棒 l_1 の振れ角 ϕ とその速度 $d\phi/dt$ の軌跡を，細線の軌跡 2/2 は棒 l_2 の振れ角 ϕ とその速度 $d\phi/dt$ の軌跡を表す．比較のために，質点1つの場合の同じ図を破線1で示した．

右：フーコー振り子の軌跡を平面に投射したもの．黒丸点から揺れ始めた振り子は，コリオリ力を受けて，その振れ面は一定の速度で右に回転していく．

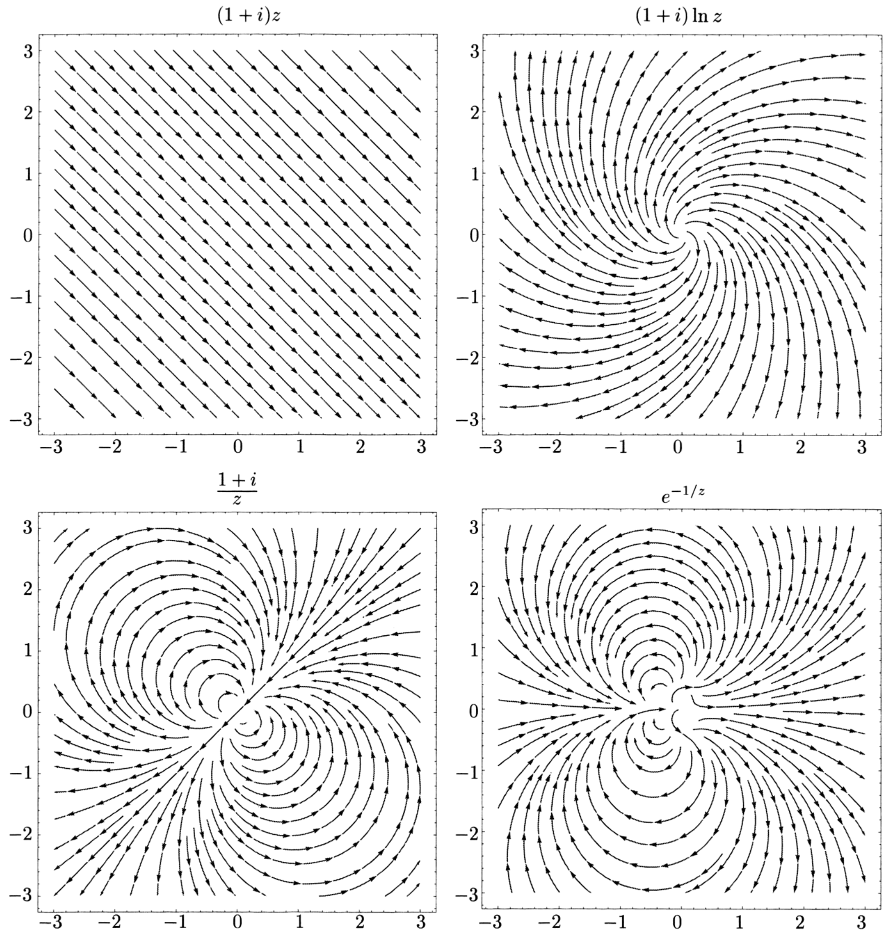


図 3.2　2 次元の流れの流跡線.

上左：$w=(1+i)\,z$．一様流を表す.
上右：$w=(1+i)\ln z$．湧き出し（源）と渦が同時に存在する流れを表す.
下左：$w=(1+i)\,/z$．湧き出し（源）と吸い込み（源）が同時に存在する流れを表す.
下右：$w=\exp\,(-1/z)$ に対応する複雑な流れ．特に，真性特異点 0 の左側は，ここには描ききれていないが，いくらでも細かな構造が存在する.

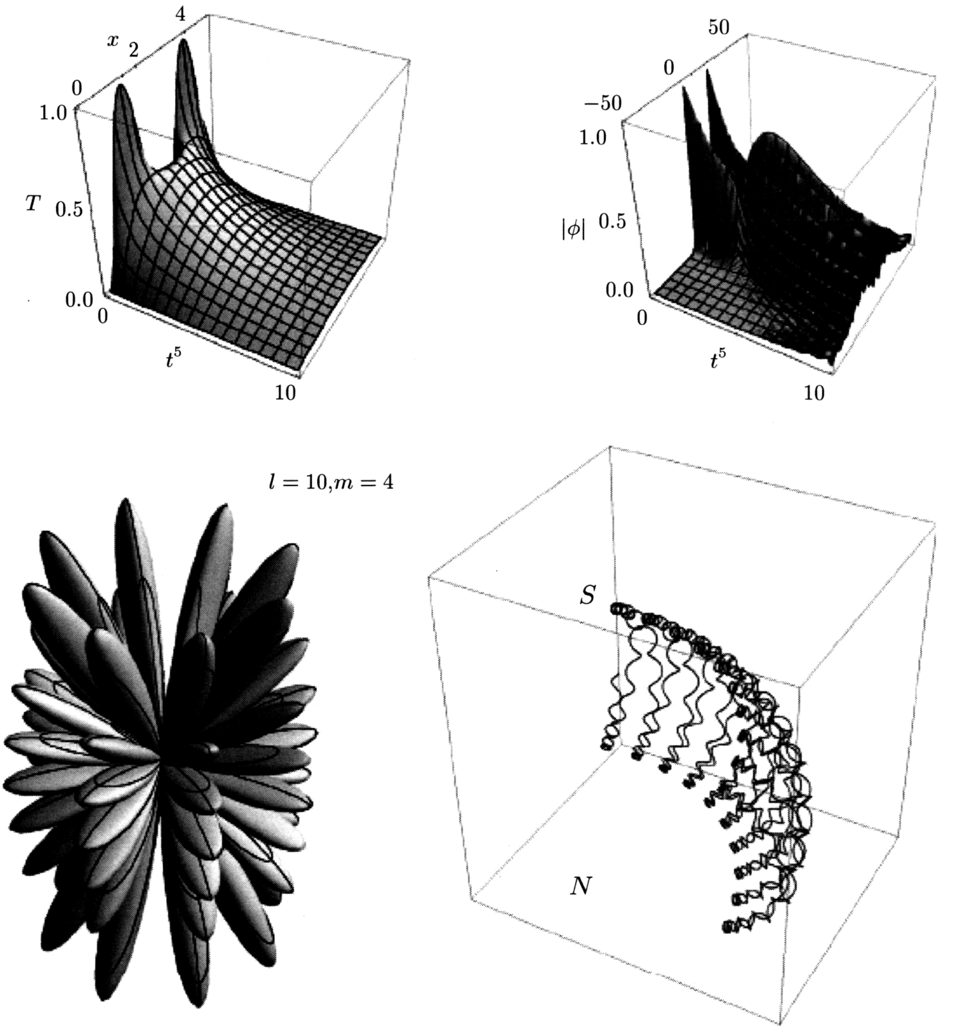


図 3.3　物理に登場するいろいろな方程式の解．

上左：拡散方程式の 1 つの解．温度を表すスカラー場 $T(t,x)$．時間，空間とも $\mathcal{R}$ で表現している．例えば，初期 $t=0$ に，2 つ山の形の分布を与え，境界 $x=0,5$ における値を指定すると，以降 $0<t$ の温度 $T(t,x)$ が順次決まっていく．だんだん拡散して一様になる．

上右：シュレーディンガー方程式の 1 つの解．波動関数を表す複素スカラー場 $\psi(t,x)$ の絶対値 $|\psi(t,x)|$．時間，空間とも $\mathcal{R}$ で表現している．例えば，初期 $t=0$ に，2 つ山の形の分布を与え，境界 $x=-50,50$ における値を等しいと指定すると，以降 $0<t$ の波動関数 $\psi(t,x)$ が順次決まっていく．だんだん干渉が顕著になってくる．

下左：シュレーディンガー方程式の 1 つの定常な解．水素原子の電子（モード $l=10, m=4$）の空間的広がりを表す．その波動関数を表す複素スカラー場 $\psi(\vec{x})$ の絶対値 $|\psi(\vec{x})|$．

下右：枠の左端中央付近にある双極子（N, S 極を示してある）によって作られる磁場

の中を運動する荷電粒子の運動軌跡．荷電粒子は磁力線に沿って旋廻しながら移動し，磁力線が密になる両極付近では反発を受けて移動の向きを変える．これが経度を少しずつずらせながら繰り返されている．

【参考書籍】

- 「流体力学」（新物理学シリーズ 21），巽友正，培風館 (1982).
- 「新版　電磁気学」（上下）（物理学叢書 20），パノフスキー，フイリップス，林忠四郎，天野恒雄（訳），吉岡書店 (1968).
- 「理論電磁気学　第 3 版」，砂川重信，紀伊國屋書店 (1999).
- 「古典場から量子場への道　増補第 2 版」（KS 物理専門書），高橋康，表實，講談社 (2006).

第 4 章
一般座標系

4.1　一般の座標系

今までは，デカルト座標系に対して 1 つの回転変換 (2.48) 式を考えてきた．しかし，この「視点を変えたときに系統的な見え方をするものが物理的実在である」という考え方は，特に「視点を変える」方法に関して，本来もっと一般的である．そもそも空間 S が等質でない一般の場合，空間全体にわたっての同一の回転というのは意味がない．空間 S の異なる点での回転をそろえる自然な手立てがないからである．同時に，座標系の軸は直行している必要はないし（斜交座標），座標基底の方向も大きさも場所や時間に依存していてよい（曲線座標）．たとえ想定している空間 S が等質であるユークリッド空間であっても，「視点を変える」方法が広いほど，我々はより広い物理的実在の概念を考えることができる．この章では，等質とは限らない空間に対して一般の座標系を考えていこう．

まず一般座標系の場合，今まで線形性を仮定して構築してきたテンソル場の理論は，非線形性を取り入れて修正しなくてはならないだろう．第 2 章では，もともと式 (2.33) で与えられた非線形変換に対して，点 $P \in S$ の周りの局所領域だけを考えて，式 (2.34) のように線形変換を想定して考察を進めた．変換を受ける空間も $\mathcal{R}^3$ を想定していたが，これは点 P で空間 S に接して無限に広がる仮に作られた線形空間であった．接点 P の依存性を強調してこの空間 $\mathcal{R}^3$ を T_P と書いてもよいだろう．点 P 近傍ではもとの空間 S を忠実に反映するが，遠方では一般にずれてしまう．考察を近傍に限ったという点で，我々の今までの解析は局所的なものであった．

一般の座標を考える上で我々は，空間 S 全体の非線形性を初めから考え直すのではなく，すでに各点において構成された T_P を S のすべての点に接続していくという方針を採ろう．すると非線形性はこの接続操作に集約されることになる．このように考えると，場は以前の図式 (1.34) には厳密には収まりきらな

いことになる．f は点 $P \in S$ $(\subset M)$ から，P ごとに用意された T_P への写像となり，f の値域は単独の空間ではなく，いわば $\{T_P|P \in S\}$ 全体を束にしたものである．どうやって接続するかも初めから明らかではないが，何らかの自然な形で接続を見出していこう．

さらにもう 1 つ一般座標系の場合に考え直さなければならないことがある．今まで，座標系 φ によって時空が一意に決まる（つまり φ が 1 対 1 の写像）良い座標系であるという条件を認めて議論してきたが，一般には保証されない．つまり逆写像 φ^{-1} があるとは限らない．例えば，ユークリッド空間においても，そこでの球座標を考えてみよう．今までのデカルト座標 $\left\{x^1, x^2, x^3\right\}$ との対応は，$0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ として，

$$x^1 = r\sin(\theta)\cos(\phi), \tag{4.1}$$

$$x^2 = r\sin(\theta)\sin(\phi), \tag{4.2}$$

$$x^3 = r\cos(\theta) \tag{4.3}$$

であるが，両極，つまり $\theta = 0$, および $\theta = \pi$ では座標は 1 対 1 の写像ではない．変数 ϕ に関して多価になってしまっている．もっと一般の空間上で一般の座標を考える場合，1 つの φ では書ききれない場合がある．そのような場合は，現実的な手立てとして，座標系 φ を定義域によって複数 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N\}$ 用意し，その全体 $\{\varphi_i\}$ で F を表現する必要があるだろう．もちろん，2 つの座標系 φ_i, φ_j の定義域が部分的に重なるときは整合性を持たなくてはならないが．これらのことを念頭においてさらに進んでみよう．

以前考えたのと同じように，距離を不変にする条件で一般の変換も考えてみよう．一般の座標では，1 つの基底を全空間にわたって設定することはできない．各点 $P \in S$ に付随した空間 T_P ごとに基底を考えなければならない．これを

$$e_1(P), \quad e_2(P), \quad e_3(P) \tag{4.4}$$

と書こう．T_P に対する双対空間を T_P^* と書くと，これも当然点 P に依存する．T_P^* の基底を

$$e^1(P), \quad e^2(P), \quad e^3(P) \tag{4.5}$$

として，以前と同じように

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta^i{}_j \tag{4.6}$$

で自然に両者の関係を付けてみよう．

空間 T_P から T_P^* への自然な対応として，$\langle e^i | \langle e^j | : T_P \longrightarrow T_P^*$ を考えこれを

$$\langle e^i | \langle e^j | = g_{ij} \tag{4.7}$$

と書くと，以前と同じように，

$$x^i \in T_P \mapsto x_i \equiv g_{ij}(x)\, x^j \in T_P^* \tag{4.8}$$

となる．同様に空間 T_P^* から T_P への自然な対応として，$|e_i\rangle|e_j\rangle : T_P^* \longrightarrow T_P$ を考えこれを $|e_i\rangle|e_j\rangle = g^{ij}$ と書くと，

$$x_i \in T_P^* \mapsto x^i \equiv g^{ij}(x)\, x_j \in T_P \tag{4.9}$$

となる．これらから，

$$g^{ij}(\vec{x})\, g_{jk}(\vec{x}) = \delta^i{}_k, g_{ij}(\vec{x})\, g^{jk}(\vec{x}) = \delta_i{}^k \tag{4.10}$$

となり，$g_{ij}(x)$ と $g^{ij}(x)$ はお互いの逆行列である．

点 P の近傍で隣り合う 2 点間の差 dx ($\in T_P$) を，基底 $\{e_i\}$ を用いて

$$dx = dx^i e_i \tag{4.11}$$

と書こう．$dx^i = \left(dx^1, dx^2, dx^3\right)$ に対して 1 つの数，

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j \tag{4.12}$$

が決まる．$g_{ij}(x)$ は計量と呼ばれる対称テンソル場で，各空間点に依存した関数であり，時空間にわたって距離を指定することができる．

座標の変換を議論した以前の式 (2.33)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{4.13}$$

に立ち戻ろう．以前は係数関数 $\partial x'^i / \partial x^j$ が定数 $a^i{}_j$ とみなせる局所領域（あるいは等質性を持った空間）に議論を限ったが，一般の場合には空間の場所による．また，式 (4.11), (4.13) から基底は，$e_j = \partial x'^i / \partial x^j e'_i$，あるいはそれに $\partial x'^i / \partial x^j$ の逆をかけて，

$$e'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j \tag{4.14}$$

と変換する．この基底で張られる線形空間の要素 $A^i(x)$ は式 (4.13) と同じように

$$A'^i(\vec{x}') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j(\vec{x}) \tag{4.15}$$

と変換して，反変ベクトル場と呼ばれる物理的実在の 1 つの形態である．一方，式 (4.11) の dx と同じように，座標の変換に関して見え方が変わらない種族はスカラー場と呼ばれる物理的実在の 1 つの形態である．

以上は空間 T_P に関する議論であったが，それと双対である空間 T_P^* に関しても同様のことが言える．式 (4.6) から，それぞれの基底がお互いに逆の関係にあるのだら，式 (4.6) を用いて，

$$e'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} e^j \tag{4.16}$$

となることがわかる．両変換 (4.14), (4.16) はお互いに逆の変換である．した

がって，この双対基底 $\left\{e^i\right\}$ で張られる空間 T_P^* の要素 $A_i(x)$ は，式 (4.14) と同じように

$$A'_i(\vec{x}') = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j(\vec{x}) \tag{4.17}$$

と変換する．このような系統性を持った種族は共変ベクトル場と呼ばれる．

以前等質な空間において考察した「視点を変えたときに系統的な見え方をする」という物理的実在の規定は，このように一般の変換や座標を考えた場合にも同様に成立する．ただし，以前は全空間いっせいに同じ変換 ${a^i}_j$（大域的変換）を考えたが，今はもっと一般に，個々の点に依存した変換 $\partial x'^i/\partial x^j$（局所的変換）を考えている．したがって，物理的実在としてここで規定されたスカラー場，反変ベクトル場，共変ベクトル場などは，より広い変換に対する系統的な見え方をする種族である点で，以前よりもっと一般化された意味の物理的実在である．

反変ベクトル場と共変ベクトル場はもともとはお互いに独立であるが，計量の場 $g_{ij}(\vec{x})$ によって自然な対応

$$A_i(\vec{x}) \leftrightarrow g_{ij}(\vec{x}) A^j(\vec{x}) \tag{4.18}$$

が定義できるので，同一視できる．つまり，1 つの実態（＝物理的実在）に関して，反変と共変の二通りの表現が可能になる．

2 種の基底 $\{e_i\}, \left\{e^i\right\}$ によって，もっと大きな線形空間が自然に構成されていく．このことによって物理的実在の範疇が一気に広がる．例えば，2 階の反変テンソル場は $e_i \otimes e_j$ を基底として構成され，座標変換に対して

$$A'^{ij}(\vec{x}') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} A^{mn}(\vec{x}) \tag{4.19}$$

として特徴付けられる種族である．また 2 階の共変テンソル場は $e^i \otimes e^j$ を基底として構成され，座標変換に対して

$$A'_{ij}(\vec{x}') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} A_{mn}(\vec{x}) \tag{4.20}$$

として特徴付けられる種族である．さらに 2 階の混合テンソル場は $e^i \otimes e_j$ を基底として構成され，座標変換に対して

$$A'^{\ j}_i(\vec{x}') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} A^n_m(\vec{x}) \tag{4.21}$$

として特徴付けられる種族である．さらに一般に，$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \cdots \otimes e_{i_m} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \cdots \otimes^{j_n}$ を基底として構成される高階テンソル場（$(m,n)-$ テンソル場）も同様に構成されていく．これらの事情は前章までの議論と全く同じである．

このように構成されたテンソル族は線形空間であるがゆえに定数倍や加法が存在する．つまり，物理量を足し合わせることに意味を持たせることができる．

4.2 接続

ここまでは完全に局所的な議論であった．テンソル場は個々の点 P 上の空間 T_P や T_P^* に独立に依存し，異なる 2 点の間の関係に言及する必要がなかった．しかし，場の微分を考えたり，広がった空間領域にわたって平均を取ったりするとき，隣り合う点の間の関係が重要になってくる．前章までに考察した等質な空間の場合は，直交座標または斜交座標の各軸との角度を一定に保って，ある点でのベクトル量を他の点まで平行移動することがあまりに自然で意識する必要さえなかった．だから微分をとる操作において何の困難もなかった．一般の空間においては，この平行移動の意味をまず考えなければならない．

まず，微分操作を考えてみよう．一般の物理量 A の微分 $dA = A(\vec{x} + d\vec{x}) - dA(\vec{x})$ は異なる点でのテンソルの差であり，我々が先に定めた和・差の規則 (2.88) からはずれてしまう．つまり，dA はテンソルとしての系統的な変換性が保障されなくなる．そしてもはやテンソル場ではなくなる．例えば，基準指標 (4.4) を決めて，反変ベクトル場 $A(\vec{x})$ に対して，

$$A(\vec{x}) = A^i(\vec{x})\, e_i(\vec{x}) \tag{4.22}$$

と書こう．この微分は

$$\frac{\partial A(\vec{x})}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i(\vec{x})}{\partial x^j} e_i(\vec{x}) + A^i(\vec{x}) \frac{\partial e_i(\vec{x})}{\partial x^j} \tag{4.23}$$

である．この第 2 項の存在のために，ベクトル場の微分を通常のように

$$\frac{\partial A^i(\vec{x})}{\partial x^j} \tag{4.24}$$

と考えてしまうと，これはもはやテンソル場ではなくなる．しかし，基底のずれを表す式 (4.23) の右辺第 2 項 $\partial e_i(\vec{x}) / \partial x^j$ をやはりもとの点の基底 $e_i(\vec{x})$ で展開して

$$\frac{\partial e_i(\vec{x})}{\partial x^j} = \mathit{\Gamma}^k_{\ ij}(\vec{x})\, e_k(\vec{x}) \tag{4.25}$$

とまとめれば，

$$\frac{\partial A(\vec{x})}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k(\vec{x})}{\partial x^j} + A^i(\vec{x})\, \mathit{\Gamma}^k_{\ ij}(\vec{x}) \right) e_k(\vec{x}) \tag{4.26}$$

なので，同一基底上の量となる．したがって

$$\frac{DA^k(\vec{x})}{\partial x^j} \equiv \left(\frac{\partial A^k(\vec{x})}{\partial x^j} + A^i(\vec{x})\, \mathit{\Gamma}^k_{\ ij}(\vec{x}) \right) \tag{4.27}$$

を微分操作と考え直すなら，これはテンソル場であり，物理的実在を与える．この微分 $DA^k(\vec{x}) / \partial x^j$ はベクトル場 $A^k(\vec{x})$ の共変微分と呼ばれる．$A^i(\vec{x})\, \mathit{\Gamma}^k_{\ ij}(\vec{x})$ の項は，普通に微分を取ったときに必然的にずれてしまう微小距離にわたって，ベクトル $A^i(\vec{x})$ を平行移動して同一の点に戻すこと（接続）に相当する．この接続を表す $\mathit{\Gamma}^k_{\ ij}(\vec{x})$ はクリストッフェル記号と呼ばれ，場所場所に異なる基底

の関係を規定する．

スカラー場に関しては特別で，どの座標から見ても値が不変なのだからその記述に基底は不要であり，式 (4.23) のような複雑さはない．つまり普通に微分してもスカラー場にとどまる．共変ベクトル場に関しては，

$$A(\vec{x}) = A_i(\vec{x})\, e^i(\vec{x}) \tag{4.28}$$

に対して，式 (4.6) を微分した式を組み合わせれば，共変微分の表式は

$$\frac{DA_k(\vec{x})}{\partial x^j} \equiv \left(\frac{\partial A_k(\vec{x})}{\partial x^j} - A_i(\vec{x})\, \Gamma^i{}_{kj}(\vec{x}) \right) \tag{4.29}$$

となることはすぐわかる．通常の微分は“,”で，共変微分は“;”で書き表すことにすると，これは簡便に

$$A_{k;j} = A_{k,j} - A_i \Gamma^i{}_{kj} \tag{4.30}$$

と書ける．高階テンソル場に関しても，複数の基底に対して式 (4.23) のように書き下せば，その共変微分は

$$\frac{DA^{kl}(\vec{x})}{\partial x^j} \equiv \left(\frac{\partial A^{kl}(\vec{x})}{\partial x^j} + A^{il}(\vec{x})\, \Gamma^k_{ij}(\vec{x}) + A^{ki}(\vec{x})\, \Gamma^l_{ij}(\vec{x}) \right), \tag{4.31}$$

$$\frac{DA^k{}_l(\vec{x})}{\partial x^j} \equiv \left(\frac{\partial A^k{}_l(\vec{x})}{\partial x^j} + A^i{}_l(\vec{x})\, \Gamma^k_{ij}(\vec{x}) - A^k{}_i(\vec{x})\, \Gamma^i_{lj}(\vec{x}) \right) \tag{4.32}$$

などとなることがわかる．これも簡便に，

$$A^{kl}{}_{;j} = A^{kl}{}_{,j} + A^{il} \Gamma^k_{ij} + A^{ki} \Gamma^l_{ij}, \tag{4.33}$$

$$A^k{}_{l;j} = A^k{}_{l,j} + A^i{}_l \Gamma^k_{ij} - A^k{}_i \Gamma^i_{lj} \tag{4.34}$$

などと書くこともできる．

$\Gamma^k_{ij}(\vec{x})$ は当然テンソル場ではありえないので物理的実体ではないだろう．しかし一般の座標においては，各点ごとに異なる線形空間 T_P, T_P^* をこの接続 $\Gamma^k_{ij}(\vec{x})$ が結び付けているのである．

4.3 テンソル解析

以上議論したように，今まで使ってきた昔ながらの微分操作は，テンソル場の共変性ひいては物理的実在性と矛盾する操作であったので，一般座標を考えたときには捨てなければならない．その代わり，今までのあらゆる微分操作をこの共変微分操作でそのまま置き換えることによって，微分を含む量であっても一般座標での普遍性を保証されることになる．

平行移動を表す接続 $\Gamma^k_{ij}(\vec{x})$ は空間の異なる地点を結び付けている．それは各点ごとに異なるように導入されている基底 $e_i(\vec{x})$ や $e^i(\vec{x})$ によって自然に表すことができる．平行移動ということは，ベクトルの間の角度や距離など幾何学的な関係を壊さない移動ということである．その基本である距離を決めてい

るのは，$e_i(\vec{x})$ から式 (4.7) によって作られる計量テンソル場 $g_{ij}(\vec{x})$ であった．だからここで，共変微分する前にも，した後もベクトル場は，$g_{ij}(x)$ によってその反変共変成分が結び付いていると要請してみよう．具体的には，

$$DA_k = g_{kl} DA^l \tag{4.35}$$

と要請する（決める）のは自然である．すると，任意のベクトル場 A_k に対して $DA_k = D\left(g_{kl}A^l\right) = \left(Dg_{kl}\right)A^l + g_{kl}DA^l$ なので，上の式は

$$Dg_{kl} = 0 \tag{4.36}$$

を導く．つまり，式 (4.33), (4.34) などと同様に，これは

$$g_{kl;m} = g_{kl,m} - \Gamma_{lkm} - \Gamma_{klm} = 0 \tag{4.37}$$

となる[*1]．この中辺の添え字を周期的にずらして和を取り，整理すると，

$$\Gamma^l{}_{km} = \frac{1}{2} g^{li}\left(g_{ik,m} + g_{im,k} - g_{km,i}\right) \tag{4.38}$$

となり，接続 $\Gamma^l{}_{km}$ が計量の微分で表された．ここから $\Gamma^l{}_{km}(\vec{x})$ は添え字 k, m について対称であることがわかる．

さらに，以前さまざまな関係式を構築する基本になった不変なテンソルたちはどのように変更されるのだろう？ まず，2 階のテンソル $\delta^i{}_j$ を考えよう．正規直交座標系 $\{x\}$ において式 (2.90) で定義された $\delta^i_{(0)j}$ から，一般の座標 $\{x'\}$ への変換は

$$\delta'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\delta^k_{(0)l} = \delta'^i_{(0)j} \tag{4.39}$$

であり，不変である．もう 1 つの 3 階のテンソル ε_{ijk} は，やはり正規直交系 $\{x\}$ において式 (2.92) で定義された $\varepsilon_{(0)lmn}$ から，一般の座標 $\{x'\}$ への変換は

$$\varepsilon'_{ijk} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\varepsilon_{(0)lmn} \tag{4.40}$$

であり，これは反対称性から $\varepsilon_{(0)ijk}$ に比例することはわかる．比例係数は $J \equiv \det(\partial x^l/\partial x'^i)$ であり，これを見出すために，テンソル g_{ij} の変換を書こう：

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}g_{(0)lm}. \tag{4.41}$$

この両辺の行列式をとると，

$$\det g' = J^2 \det g_{(0)} = J^2 \tag{4.42}$$

となるので，

$$J = \sqrt{\det g'} \tag{4.43}$$

---

*1 上下の添字は g_{kl} を使って自由に動かしている．例えば $g_{ij}\Gamma^j{}_{ab} = \Gamma_{iab}$ など．

である．したがって，ε'_{ijk} は

$$\varepsilon'_{ijk} = \sqrt{\det g'}\varepsilon_{(0)ijk} \tag{4.44}$$

となる．そしてこの量が3階テンソルとして変換する．以前，$\varepsilon_{(0)ijk}$ を用いて作られた微小体積，微小面積にはすべて因子 $\sqrt{\det g}$ が付いて初めて不変量となり，これを用いて積分された量が不変量となる．例えば不変微小体積，不変微小面積は，それぞれ

$$dV = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}dx^i dx'^j dx''^k = \sqrt{\det g}dx^1 dx^2 dx^3, \tag{4.45}$$

$$df_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}dx^j dx'^k = \sqrt{\det g}\varepsilon_{(0)ijk}dx^j dx'^k \tag{4.46}$$

となる．

では，共変な微分を用いて，div, grad, rot などはどのように書けるだろうか？ ベクトル場 $A^i(\vec{x})$ に対して div は，

$$\frac{DA^i}{\partial x^i} \equiv A^i_{;i} = A^i_{,i} + \Gamma^i{}_{ij}A^j \tag{4.47}$$

となる．さらに，$\Gamma^l{}_{km}$ に対する上の式および，

$$d(\det g) = (\det g)g^{ij}dg_{ji} \tag{4.48}$$

から，

$$\Gamma^i{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \frac{1}{2\det g}\frac{\partial \det g}{\partial x^j} \tag{4.49}$$

とまとめられるので，

$$\frac{DA^i}{\partial x^i} = A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial\left(\sqrt{\det g}A^i\right)}{\partial x^i} \tag{4.50}$$

と書ける．$A^i = \phi^{;i}$ とおくと，スカラー場 ϕ に対するラプラシアンは

$$\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial\left(\sqrt{\det g}g^{ik}\phi_{,k}\right)}{\partial x^i} \tag{4.51}$$

となる．

次にベクトル場 $A^i(\vec{x})$ の rot は，

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \sqrt{\det g}\varepsilon_{ijk}g^{lj}\frac{DA^k}{\partial x^l} \tag{4.52}$$

となるが，

$$\begin{aligned}\left(\frac{DA_k}{\partial x^j} - \frac{DA_j}{\partial x^k}\right) &= A_{k;j} - A_{j;k} \\ &= A_{k,j} - A_{j,k} + A_m\left(-\Gamma^m_{kj} + \Gamma^m_{jk}\right)\end{aligned} \tag{4.53}$$

なので，Γ^m_{kj} の対称性 $\Gamma^m_{kj} = \Gamma^m_{jk}$ から上記は，

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \sqrt{\det g}\varepsilon_{ijk}g^{lj}\frac{\partial A_k}{\partial x^l} \tag{4.54}$$

とまとまる．

例えば，頻繁に使われる球座標 $\{r, \theta, \phi\}$:

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi, \tag{4.55}$$

$$x^2 = r\sin\theta\sin\phi, \tag{4.56}$$

$$x^3 = r\cos\theta \tag{4.57}$$

を考えると，この座標系で

$$g_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^2, r^2\sin^2\theta\right), \tag{4.58}$$

$$g^{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^{-2}, r^{-2}\sin^{-2}\theta\right), \tag{4.59}$$

$$\det g = r^2\sin\theta \tag{4.60}$$

なので，上記の公式を使って

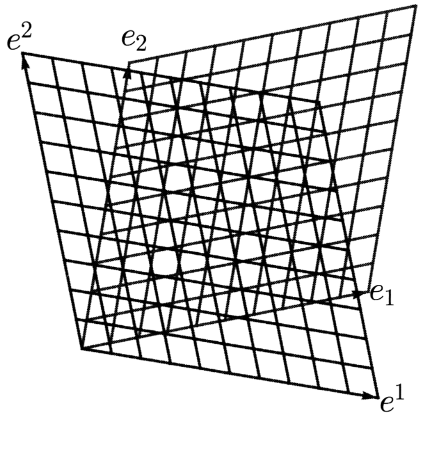
$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right) + \sin^{-1}\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi\right), \tag{4.61}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A^r\right) + r^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A^\theta\right) + r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial\phi}A^\phi\right), \tag{4.62}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = (\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi) \times \left(A^r, A^\theta r^2, A^\phi r^2\sin^2\theta\right) \tag{4.63}$$

などとなる．上式で $\mathrm{diag}(*, *, *)$ は，対角成分 $(*, *, *)$ の対角行列を表す．

問題 42　この節の計算を確認すること．



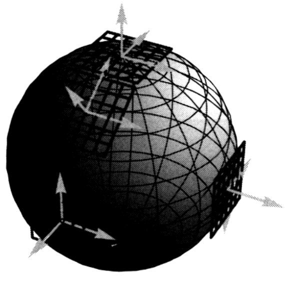


図 4.1

左：2 次元における斜交座標の例．空間 S（基底は e_1, e_2）と双対空間 S^*（基底は e^1, e^2）．$e_1 \perp e^2$ であり，$e^1 \perp e_2$ でもある．

右：2 次元における一般座標の例．基底が場所場所によって変化するので，各点 P ごとに異なるベクトル空間 T_P が対応する．

第 5 章

ローレンツ変換

2 章では，座標変換として主に空間回転の変換を考えてきた．「視点を変えても不変」な性質を求めて，さまざまな応用を見てきたが，「視点の変更」は空間回転に限らない．視点を変える変換はたくさんある．例えば，時間と空間を混ぜ合わせる変換は空間の回転より広い．重要な問題は，我々が住んでいるこの時間空間は，そのような視点の変更を許すのかどうかである．

今まで，視点を変えたときに系統的に変わるものとして，物理的な実在を空間回転に関するテンソル場として議論してきた．テンソル場は「変換」に依存した概念なので，今までの空間回転変換でテンソル場であった量でも，異なる変換で見るとテンソル場ではなくなることもありうる．どのような変換が自然界に許されているのかを探る手立てとして，空間回転のとき空間距離が不変であったのと同様に，その変換によって何が不変であるかを考察していこう．

ニュートンの力学においては，粒子の速度は 3 次元のベクトルであり，その和がベクトルの和として規定されていた．したがってたくさんの速度の和からいくらでも大きな速度が可能であったし，粒子の速度は一定速度で動いている座標系（慣性系）から見るとその速度の分だけ増減するはずであった．しかし，光の速度 c は座標系によらないことが実験的に確かめられた．この事実と，物理法則は座標系によらないという相対性原理から，昔ながらの直感的な時間空間構造は正しくなく，修正されなければならないことがわかった．同時に，今まで物理的な対象物であると考えてきた 3 次元のテンソルは，正確には自己同一性を保持しないし，それら物理量の間の共変的な関係式で表される古典的な物理法則も正確には正しく成立しない．

ここではより正確な意味での物理的実在を同定し，より正しい物理法則を考察していこう．

5.1 ローレンツ変換

ある慣性座標系 K において，速度 c の光が時間 dt の間に $d\vec{r}$ だけ進んだとすると，

$$c^2\left(dt\right)^2-\left(d\vec{r}\right)^2=0 \tag{5.1}$$

の関係がある．そしてこの関係はどんな慣性系でも成立することが実験から確かめられている．つまり，

$$ds^2\equiv c^2\left(dt\right)^2-\left(d\vec{r}\right)^2 \tag{5.2}$$

と定義された時間空間の中での「距離」が不変なのである．ds は世界間隔と呼ばれる．時間空間座標は $\{ct,x,y,z\}=\left\{x^0,x^1,x^2,x^3\right\}=\{x^\alpha\}_{0\leq\alpha\leq3}$ と記そう*1．普遍定数としての光の速度 c は，時間と空間の次元をあわせるために導入する．すると，上式の不変な「距離」は

$$ds^2\equiv\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.3}$$

とまとめられる．ここで，$\eta_{\alpha\beta}\equiv$diag$(1,-1,-1,-1)$，つまり

$$\eta_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

を定義した．これは第 4 章の式 (4.12) における計量 $g_{ab}\left(\vec{x}\right)$ に対応する．したがってテンソルの反変成分（上付き添え字で表す）と共変成分（下付き添え字で表す）は $\eta_{\alpha\beta}$ で結びついている．

ある慣性座標系 K における座標 $\{x^\alpha\}_{0\leq i\leq3}$ と，別の慣性座標系 K' における座標を $\{x'^\alpha\}_{0\leq i\leq3}$ は

$$x'^\alpha=L^\alpha_{\ \beta}x^\beta \tag{5.5}$$

という線形の関係があるとしよう．線形変換であるのは以前と同じ理由である．式 (5.3) が K でも K' においても同じであるためには，

$$L^\alpha_{\ \nu}\eta_{\alpha\beta}L^\beta_{\ \mu}=\eta_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

でなければならない．この条件から変換 $L^\alpha_{\ \beta}$ を求めてもよいがもっと簡単な方法がある．式 (5.3) は，もし虚数時間 $\tau\equiv ict=ix^0$ を用いれば，4 次元ユークリッド空間の距離（に負号を付けたもの）になることに着目しよう．そのように形式的に用意された距離を不変にする変換は，すでに議論したとおり，回転

*1 ラテン文字，$a,b,c,\cdots$ は 1,2,3 を表し，ギリシア文字 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ は 0,1,2,3 を表すと約束しておこう．

である．その表式において，時間をもとの変数 x^0 に戻せば求めたかった変換 L^α_β になっているはずである．静止した座標系 K に対して，まず最も簡単に，x^1 方向に一定の速さ V で動く別の慣性座標系 K' を考えよう．変換は x^2, x^3 方向には無関係だから，τ, x^1 空間の中での 2 次元回転を求め，x^0, x^1 変数に戻せばよい．そのようにして

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

がわかる．ここで，

$$\beta = \frac{V}{c}, \tag{5.8}$$

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \tag{5.9}$$

である．一般の速度 $\vec{V}$ で K 系が動く場合には，$\vec{x}$ を

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp = P_\parallel \vec{x} + P_\perp \vec{x}, \tag{5.10}$$

$$P^\alpha_{\parallel\beta} = \frac{V^\alpha V_\beta}{V^2}, \quad P^\alpha_{\perp\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{V^\alpha V_\beta}{V^2} \tag{5.11}$$

と分解して，

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V^\alpha/c \\ \gamma V^\alpha/c & \gamma P^\alpha_{\parallel\beta} + P^\alpha_{\perp\beta} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

と書ける．4 次元のクロネッカーデルタを

$$\delta^\beta_\alpha = \begin{Bmatrix} 1 & \text{for} & \beta = \alpha \\ 0 & \text{for} & \beta \neq \alpha \end{Bmatrix} \tag{5.13}$$

と定義した．

計量 (5.3) を持つ時間空間はミンコフスキー空間と呼ばれる．これは，今まで考えてきた 3 次元ユークリッド空間に，単純に時間次元を継ぎ足した時空とは明らかに異なっている．実験的には，そのような単純な空間は近似的にしか正しくなく，実際にはミンコフスキー空間であることが確認されている．つまり，$\beta \ll 1$ のとき，ローレンツ変換は

$$L \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V^\alpha/c & \delta^\alpha_\beta \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

となって，速度が加法的（ガリレイ変換）になり，素直な時空描像に戻る．さらに本来ローレンツ変換 L^α_β は，その定義から，3 次元の回転変換も含む．したがって我々は「視点」を回転変換からローレンツ変換に広げ，さらに空間 M もユークリッド空間からミンコフスキー空間に広げて，物理的実在の範疇を拡

大しているのである．

以前3次元の回転変換に対するテンソル場を定義していったが，ローレンツ変換に対するテンソル場も同様に定義できる．0階のテンソル場，つまりスカラー場はローレンツ変換に対して不変である．世界間隔 ds もスカラー場である．

1階のテンソル場，つまりベクトル場はローレンツ変換に対して座標 x と同じように変換する．以降，$\{x^\alpha\}_{0\leq\alpha\leq 3}$ を x と表記することにしよう．つまりベクトル場 $A^\mu(x)$ $(\in \tilde{\varphi}(F))$ は，ローレンツ変換に対して系統的に

$$A'^\mu = L^\mu_{\ \nu} A^\nu \tag{5.15}$$

と振る舞う，自己同一性を持った物理的実体であると規定しよう．一方，

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \tag{5.16}$$

と表現されるものは，任意のベクトル B^μ $(\in \tilde{\varphi}(F))$ に作用して，実数を生成する

$$A_\mu B^\mu = B^\mu g_{\mu\nu} A^\nu \in \mathcal{R} \tag{5.17}$$

ので，$\tilde{\varphi}(F)^*$ の要素と考えられる．$\tilde{\varphi}(F)$ と $\tilde{\varphi}(F)^*$ を区別して，前者を反変ベクトル場，後者を共変ベクトル場と呼ぶのであった．

共変ベクトル場 $A_\mu(x)$ は，ローレンツ変換に対して系統的に

$$A'_\mu = L_\mu^{\ \nu} A_\nu \tag{5.18}$$

と振る舞う，自己同一性を持った物理的実体であると規定しよう．ここで式(2.36)と同様，

$$L^\mu_{\ \nu} L_\lambda^{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \lambda} \tag{5.19}$$

である．2階の反変テンソル場 $A^{\mu\nu}(x)$ であれば

$$A'^{\alpha\beta} = L^\alpha_{\ \mu} L^\beta_{\ \nu} A^{\mu\nu} \tag{5.20}$$

によって，2階の共変テンソル $A_{\mu\nu}(x)$ であれば

$$A'_{\alpha\beta} = L_\alpha^{\ \mu} L_\beta^{\ \nu} A_{\mu\nu} \tag{5.21}$$

によって，2階の混合テンソル $A^\mu_{\ \nu}(x)$ であれば

$$A'^\alpha_{\ \beta} = L^\alpha_{\ \mu} L_\beta^{\ \nu} A^\mu_{\ \nu} \tag{5.22}$$

によって規定する．高階のテンソル場も物理的実在の存在形態として順次構成されていく．

この章では，単にテンソル場，あるいは4テンソル場と言えば，このローレンツ変換に対するテンソル場であると約束しよう．

今の場合にも以前と同じように不変テンソルが重要になる．スカラーはいつも不変であるが，不変なベクトルは存在しない．さらに2階のテンソルでは，

式 (5.19) によって，4 次元クロネッカーデルタ $\delta^{\beta}_{\ \alpha}$ は不変である：

$$\delta'^{\alpha}_{\ \beta} = L^{\alpha}_{\ \gamma} L_{\beta}^{\ \delta} \delta^{\gamma}_{\ \delta} = \delta^{\alpha}_{\ \beta}. \tag{5.23}$$

4 階のテンソルでは，4 次元完全反対称テンソル（エディントンテンソル）の $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ はやはりローレンツ変換に対して形を変えない．

$$\varepsilon'^{\mu\nu\lambda\kappa} = L^{\mu}_{\ \alpha} L^{\nu}_{\ \beta} L^{\lambda}_{\ \gamma} L^{\kappa}_{\ \delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}. \tag{5.24}$$

これらは特別に重要である．$\delta^{\alpha}_{\ \beta}$ は反変成分と共変成分の「縮約」を生成し，テンソルの階数を 2 つ下げる．$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は n 階のテンソル場から新たな $(4-n)$ 階テンソル場を構成する．また，不変な面積・体積要素を構成する：

$$df_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^{\gamma} dx'^{\delta}, \tag{5.25}$$

$$d\Omega = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^{\alpha} dx'^{\beta} dx''^{\gamma} dx'''^{\delta} = c dt dx dy dz. \tag{5.26}$$

問題 43　$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}$ およびその縮約などは $\delta^{\alpha}_{\ \mu}$ を用いてどのように表されるか？

5.2　力学

以前考察した質点に対するニュートンの方程式 (3.3) は，ローレンツ変換 (5.7) に対して不変ではないことが確認できる．特に，速度が光速に近いときに，それは著しいことがわかる．したがってニュートンの方程式は正しく書き直さなければならない．

時空座標 x^{α} で記述される質点の運動に対して，3 次元速度の情報を含むローレンツ変換に対するベクトルは

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \tag{5.27}$$

であり，加速度のベクトルは

$$w^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds} = \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} \tag{5.28}$$

である．粒子に対しては $ds = c\gamma^{-1} dt$ なので[*2]，$\vec{v}$ を使って，速度ベクトル u^{α} は

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

と書ける．ただし，$\vec{\beta} = \vec{v}/c$ である．4 成分を持つ u^{α} の独立成分は 3 個で，実際

---

*2 $ds^2 = c^2 dt^2 - \dfrac{(dx)^2}{(dt)^2} dt^2$ から．

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \tag{5.30}$$

の関係があり，したがって u^α と w^α は時空の中で直交する：

$$u^\alpha w_\alpha = 0. \tag{5.31}$$

ユークリッド空間の中で考えられていたニュートンの力学は正確ではなく，正しくは 4 次元のテンソル形式に書き直される必要がある．この場合，内包している 3 次元のテンソル形式で記述された力学が指針になる．つまり，$\beta \ll 1$ のときにニュートン力学に戻るように構成するのである．速度は力によって変化するので，運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = c_1 f^\alpha \tag{5.32}$$

というテンソル形式になるはずである．ここで，f^α は力を表す 4 次元ベクトルであり，定数 c_1 は，$\beta \ll 1$ のときに 3 次元の力学を再現する，という条件で決まる．3 次元のときの力を $\vec{F}$ とすると，

$$f^i = \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} \gamma^2 \vec{\beta} \cdot \vec{F} \\ \vec{F} \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

および，$c_1 = (mc)^{-1}$ となる．

式 (5.32) によると，力が働かなければ $u^\alpha(t)$ が保存する．$mcu^\alpha(t)$ の空間部分は，$\beta \ll 1$ のときに運動量になるので，その一般化である．そして時間部分は，もう 1 つの保存則，エネルギー保存則に対応し，エネルギーの一般化である．このようにして，エネルギー運動量

$$p^\alpha \equiv mcu^\alpha \tag{5.34}$$

の保存則を得る．

角運動量を考えてみよう．3 次元のときは，力に特別な方向がないときには，a でラベルされた粒子たちに対する和

$$\vec{J} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a \tag{5.35}$$

が保存するのであった．これは擬ベクトルである．x, p に線形でその交換に対して反対称に振る舞う 4 次元量は

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\gamma x^\delta \tag{5.36}$$

あるいはそれに等価な

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha \right) \tag{5.37}$$

である．4 次元では角運動量は 2 階のテンソルで表現されることになる．

5.3 電磁場と荷電粒子の系（2）

電磁場のマックスウェル方程式 (3.102), (3.106), (3.109) および (3.110) は，ローレンツ変換 (5.7) に対して共変な形をしていることは直接確認できる．したがって方程式自身は初めから正しそうだ．しかし，このローレンツ変換に対しては，電場 $\vec{E}(x)$ や磁場 $\vec{H}(x)$ はもはや個別に 3 次元ベクトル場として独立に自己同一性を持った物理量ではなく，お互いに移り変わってしまうことを認めなければならない．電荷や電流，スカラー・ベクトルポテンシャルもそうである．ローレンツ変換に対して自己同一性を持った量であれば，それはローレンツ変換に対する 4 次元のテンソル場でなければならない．ではどのようにそれらを同定したらいいのだろうか？

考えやすい電流ベクトル場から始めよう．我々はこれに対応する（含む）ローレンツ共変なベクトル場 $j^\mu(x)$ を作りたい．候補としては，式 (2.124) で与えられる電荷密度に，粒子の速度を表現する $dx^\mu(t)/dt$ をかけたものを調べてみよう：

$$j^\mu \equiv \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \tag{5.38}$$

これを 4 次元体積積分すると

$$\begin{aligned}\int j^\mu d\Omega &= \int e\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{z}(t)\right)\frac{dx^\mu}{dt}d\Omega \\ &= e\int dz^\mu \end{aligned} \tag{5.39}$$

となり，これはベクトルである．4 次元体積 $d\Omega$ はスカラーであったので，$j^\mu(x)$ はベクトル場である．$j^\mu(x)$ を成分で書くと

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right)^T \tag{5.40}$$

となる．以前見た電荷の保存則は式 (3.108) の形をしていた：$\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{i} = 0$．これは，$j^\mu(x)$ で書くとローレンツ変換に対して不変なスカラーの形

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{5.41}$$

となる．電磁場は，3 次元のスカラーポテンシャル ϕ，ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を導入して

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}, \tag{5.42}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{5.43}$$

と表されていた．これらのポテンシャルは，1 つの 4 次元ポテンシャル $A^\mu(x)$,

$$A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)^T \tag{5.44}$$

にまとめられるだろうと推測する．すると，式 (5.42), (5.43) は，$A^\mu(x)$ を使

うと，

$$H^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda}, \tag{5.45}$$

$$E^{\mu} = -\partial^{0}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{0} \tag{5.46}$$

と表される．ここには結局 2 階のテンソル $\partial^{\mu}A^{\nu}$ の反対称成分だけが現れていることになる．この反対称テンソル（$F^{\mu\nu}$ とかく）の独立変数は 6 個であり．電磁場の自由度と同じである．このようにして，

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(x) &= \partial^{\mu}A^{\nu}(x) - \partial^{\nu}A^{\mu}(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.47}$$

となる．つまり，電磁場は 1 つの 2 階（反対称）テンソルの成分であったのである．したがってローレンツ変換によって電場と磁場はお互いに移りあうファミリーであり，あわせて自己同一性を持った物理的実在であることがわかる．

このように，荷電粒子は $j^{\mu}(x)$ というローレンツ変換に対する 4 次元のベクトル場（4-ベクトル場とも言う）で表される．電磁場は $F^{\mu\nu}(x)$ で表される．これらを支配する方程式はローレンツ共変であるべきである．それぞれの運動が他からどのように決まるのかを考察していこう．簡単のためにこの章では，「ローレンツ変換に対するテンソル場」を，単にテンソル場，あるいは 4 テンソル場と呼んでいる．

5.4 場と粒子の相互作用

まず荷電粒子の運動を考えよう．荷電粒子はベクトル場 $j^{\mu}(x)$ で表されているので，その時間発展をその固有時（粒子の静止系での時間 τ, $ds = cd\tau$）での微分 $dj^{\nu}/d\tau$ として考える．この量はベクトル場である．$j^{\mu}(x)$, $F^{\mu\nu}(x)$ から作られるベクトルで，$F^{\mu\nu}(x)$ に対して線形なものは $\partial_{\mu}F^{\mu\nu}$ と $j_{\mu}F^{\mu\nu}$ しかない．しかし前者を採用すると時間反転対称性を壊す．したがって，α を定数として，

$$\frac{dj^{\nu}}{d\tau} = \alpha j_{\mu}F^{\mu\nu} \tag{5.48}$$

となる．$\alpha = e$ とすると，これは式 (3.107) $m\ddot{x} = q\left(\vec{E} + \mu\vec{H}\right)$ を，式 (5.32) による相対論的補正を施した形をしている．

5.5 電磁場と荷電粒子の系（3）

一方，電磁場に対しては，粒子ではないので，固有時が存在しない．その時

間発展は $F^{\mu\nu}$ の微分 ∂^λ から作らなければならない．つまり $\partial^\lambda F^{\mu\nu}$ であるが，この 3 階テンソル量を，$j^\mu(x)$, $F^{\mu\nu}(x)$ およびそれらの微分から書こうとするとき，$\mu\nu$ について反対称に組まなければならないので，それは $j^\lambda F^{\mu\nu}$ しかないがこれは時間反転対称性を壊す．したがって，時間発展の表式は不変テンソル $\delta^\mu{}_\nu$ を用いて 1 階テンソル量 $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ を採用しなければならない．その場合，これを表す量は j^ν しかない．したがって，

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{5.49}$$

を得る．この方程式は 4 個であり，変数の数 6 個には足りない．電磁場に対しては，2 階の擬テンソル

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{5.50}$$

に対して，もう 1 つの時間発展の表式が必要である．この場合，擬ベクトルは存在しないので

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{5.51}$$

となるしかない．これら式 (5.49), (5.51) はすべてのマックスウェルの方程式 (3.102), (3.106), (3.109) および (3.110) と同じであることを確認できる．

ゲージ変換の自由度を使ってこの時間発展方程式を簡略化したいが，以前利用した $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ という条件は 4 テンソルの関係にはなっていないので今は不都合である．しかしこれを 4 テンソルの関係に一般化した

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{5.52}$$

を使うことができる．すると，式 (5.49) からベクトルポテンシャル $A^\mu(x)$ に対して

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu \tag{5.53}$$

を得る．これはラプラス方程式の 4 次元版である．これは，電荷や電流 $j^\nu(x)$ が源となって作られた電磁波が運動する様子を記述する．

真空中では $j^\nu(x) = 0$ であり，式 (5.53) は光速度で進行する解を持つ．例えば y, z 方向には一様で，x 方向に進行する解（平面波）は，f_R, f_L を任意関数として，

$$f_R\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_L\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{5.54}$$

となる．$f_R\left(t - \frac{x}{c}\right)$，$f_L\left(t + \frac{x}{c}\right)$ はそれぞれ x 方向，$-x$ 方向に進む波である．さらに例えば，場が球対称である場合を考えてみよう．まずスカラーポテンシャル $\phi(t, r)$ に対する式 (5.53) は，3 次ラプラシアンに対して式 (4.61) を用いると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.55}$$

となる．式 (5.54) のような解を想定し，変数を $\phi(t,r)=\chi(t,r)/r$ と変えてみると，この式は

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0 \tag{5.56}$$

となり，その解は f_O, f_I を任意関数として，

$$\chi(t,r)=f_O\left(t-\frac{r}{c}\right)+f_I\left(t+\frac{r}{c}\right) \tag{5.57}$$

となる．$f_O\left(t-\frac{r}{c}\right)$，$f_I\left(t+\frac{r}{c}\right)$ はそれぞれ外向き，内向きに進む波である．原点に点電荷がある場を考える場合は，因果性から，外向き波を選び，$\phi(t,r)=f_O\left(t-\frac{r}{c}\right)/r$ の形となる．

点電荷 e によって作られる電磁場を考えてみよう．時刻 t の電荷の位置を $\vec{r}_s(t)$，求める場の位置を $\vec{r}$ として，その差を $\vec{R}(t)\equiv\vec{r}-\vec{r}_s(t)$ と書こう．電荷の静止系 K' においては，クーロンの法則から

$$A'^{\mu}(t',\vec{r}')=\left(\frac{e}{\left|\vec{R}'(t')\right|},\vec{0}\right) \tag{5.58}$$

である．一般の速度 v で動く座標系における表式は，これを共変な形で書けばよい．静止系では $u=\gamma\bigl(1,\vec{0}\bigr)$ なので，これと 4 ベクトル

$$R^{\mu}=\left(c(t-t_s),\vec{R}\right) \tag{5.59}$$

を用いて 4 ベクトル量を作ると，$\left|\vec{R}'(t')\right|=c(t-t_s)$ だから（光速 c で伝播するので $R^{\mu}R_{\mu}=0$）

$$A^{\mu}(t,\vec{r})=\frac{eu^{\mu}}{R^{\nu}u_{\nu}}=\left(\frac{e}{R-\frac{1}{c}\vec{v}\vec{R}},\frac{e\vec{v}/c}{R-\frac{1}{c}\vec{v}\vec{R}}\right) \tag{5.60}$$

となる．これはリエナール・ヴィーヒェルトのポテンシャルと呼ばれる．電磁場 $\vec{E},\vec{B}$ はこれを微分して求めていくことができる．

3 章で電磁場のエネルギーが保存することを見た．相対論ではエネルギーと運動量は一体となって 1 つの運動量ベクトル (5.34) を構成する．したがって，相対論におけるエネルギー・運動量保存の表式は，一体となってあるテンソルに対して

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}=0 \tag{5.61}$$

となるはずである．そしてこの $\mu=0$ 部分がエネルギー保存の式 (3.129) に対応して，

$$T^{0\nu}=\left(c\rho_{em},\vec{J}_{em}\right) \tag{5.62}$$

である．これらは電磁場について 2 次形式である．テンソル場は 1 体となって存在するのだから全体も $F^{\mu\nu}(x)$ について 2 次の形式であるべきである．そのような 2 階テンソル場は $F^{\mu\lambda}(x)F^{\nu}{}_{\lambda}(x)$，$\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x)$ しかない．こ

の組み合わせで式 (5.62) になるテンソルは

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\ \lambda} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} \tag{5.63}$$

と確定する．この保存量はエネルギー運動量テンソルと呼ばれる．$T^{\mu\nu}$ は対称テンソルである．

問題 44　電磁場には，なぜラグランジュ的な記述がないのだろうか？

問題 45　電場と磁場の類似性と差異はなんだろうか．つまり電場と磁場を取り替えることはできるだろうか？

問題 46　式 (5.60) から具体的に電磁場を求めること．

5.6 輻射減衰

荷電粒子が加速運動すると一般に輻射する．それは保存するエネルギーを遠方に運ぶから，その荷電粒子はもとのエネルギーを失う．これは時間反転対称性を破る現象であり，特にローレンツ摩擦と呼ばれている．その詳細は，この過程に基礎方程式を用いて計算する．ここでは簡略に，そのような摩擦力がどんな形をしているか，相対論的要請から決定してみよう．荷電粒子の運動方程式 (5.32) は一般に

$$m\dot{u}^{\alpha} = f^{\alpha} \tag{5.64}$$

と書かれる．ここで，固有時間での微分 $\partial/\partial\tau$ を上付きの点で表している．右辺 f^{α} は一般化された力である．これは元は荷電粒子の運動が起源にあるわけだから，荷電粒子を特徴付ける量，$u^{\alpha}, \dot{u}^{\alpha}, \ddot{u}^{\alpha}$，などで表されるはずである．もし u^{α} に比例した項があれば，この荷電粒子は単に慣性系にあっても輻射減衰してしまうことになって現実とあからさまに矛盾する．$\dot{u}^{\alpha}$ に比例する項は左辺の質量 m に繰り込まれる．したがって最も簡単な，微分の最低次では $f^{\alpha} \propto \ddot{u}^{\alpha}$ でなければならない．その係数は，式 (5.49) から e の大きさで電磁場が放射され，式 (5.48) からその電磁場が e の大きさで荷電粒子に作用するのだから e^2 に比例することがわかる．さらにこの過程は電磁相互作用以外の特別な要因を含まない普遍的なものなので，何らかの普遍定数で次元をあわせる必要があり，結局さらに c^{-3} にも比例することになる．さらにその力 f^{α} は，常に $u_{\alpha}\dot{u}^{\alpha} = 0$ だから $u_{\alpha}f^{\alpha} = 0$ でなければならない．つまり f^{α} は速度 u^{α} に垂直でなければならないこともわかる．以上のことをすべて考慮して，$\ddot{u}^{\alpha}$ の速度 u^{α} に平行な成分 $u^{\alpha}u_{\beta}\ddot{u}^{\beta}$ を差し引いて，

$$f^{\alpha} = \alpha\frac{e^2}{c^3}\left(\eta^{\alpha}_{\ \beta} - u^{\alpha}u_{\beta}\right)\ddot{u}^{\beta} \tag{5.65}$$

の形の式が得られる．実験からでも理論的計算からでも $\alpha = 2/3$ であることがわかる．したがって，

$$m\dot{u}^{\alpha} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\eta^{\alpha}{}_{\beta} - u^{\alpha}u_{\beta}\right)\ddot{u}^{\beta} \tag{5.66}$$

が求める式である．非相対論的な $|v/c| \ll 1$ である場合，この式を 3 次元形式で書くと

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \tag{5.67}$$

となる．

問題 47　式 (5.67) は高階微分を含むので因果性を壊す．外力がない場合には暴走解となることもある．これらの不都合は何に由来するのか？

5.7　クライン・ゴルドン方程式

シュレーディンガー方程式 (3.90) は時間 1 階空間 2 階の微分方程式で，相対論的には共変な形をしていなかった．もし相対論的な拡大された物理的実在として理解したければ，相対論的に共変な形に書き直さなければならない．一番簡単には，複素スカラー場 $\Psi(x)$ に対して時間空間 2 階の微分方程式を考えることである．つまり，式 (3.90) のかわりに，

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\Delta\Psi(x) + m^2c^4\Psi(x) \tag{5.68}$$

を考えることである．相互作用の項はとりあえず省いた．もっとローレンツ共変性が見える形で書くと，

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{5.69}$$

となる．これはクライン・ゴルドン方程式と呼ばれる．式 (5.69) の左から $\Psi^\dagger$ を掛けたものの虚部を取れば，

$$J_\mu \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^\dagger\partial_\mu\Psi - \Psi\partial_\mu\Psi^\dagger\right) \tag{5.70}$$

が保存する流れとなることがわかる：

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{5.71}$$

ただ，この流れの第 0 成分 J_0，

$$J_0 = c\rho = \frac{i\hbar}{2mc}\left(\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\right) \tag{5.72}$$

は正にも負にもなりえるので，シュレーディンガー方程式のときのように，確率密度，ましてや単純な分布密度という解釈はこのままでは不可能である．整合的な運動方程式はスピノルを用いて作ることができる．

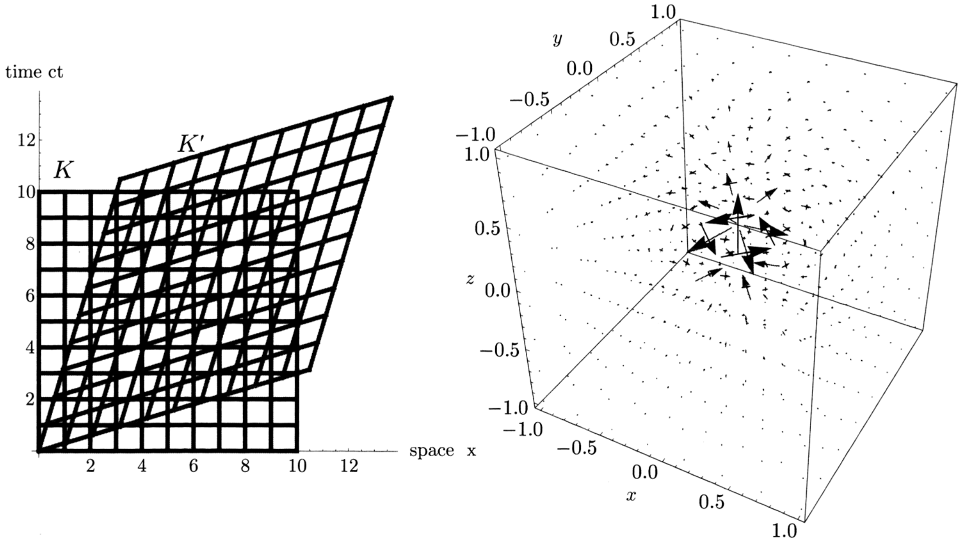


図 5.1

左：静止座標系 K と x 方向に一定速度 V で動く運動座標系 K'．K' の座標軸は K のそれに対して角度 $\arctan(V/c)$ だけ（菱形に）傾いている．

右：中央で上向きに加速する荷電粒子（上向き矢印で表示）が作る電場と磁場のようす．

【参考書籍】

- 「場の古典論　原書第 6 版—電気力学，特殊および一般相対性理論」（ランダウ=リフシッツ理論物理学教程），エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，恒藤敏彦（訳），東京図書 (1978).

第 6 章
時空の一般の変換

6.1 時空の一般座標変換

前章まで，式 (1.34) に基づいて，回転変換やローレンツ変換という視点 φ の変更 R に対して，場の見え方 $\tilde{\varphi}$ が系統性を持った変換 $\tilde{R}$ をする存在として，物理的実在を捉えてきた．したがって物理的実在は変換をどう決めるかに依存した概念となる．さらに大きな変換を考えると，物理的実在の範疇が広がる．そして一般に，それまで無関係であった物理量が実は見え方の違いだけであって，本質的に同じものであることが判明したりする．我々はそれらの実在物の運動を決める物理法則の可能な形を大きな枠組みから決めてきた．

今まで我々が考察してきたのは，第 2 章の空間回転，第 4 章の空間の一般座標変換，そして第 5 章の時間空間のローレンツ変換であった．ではもっと拡大して，これらを含む，時間空間の一般座標変換を考えたらどうだろうか？ 今まで主に慣性系を意識した変換だけを考えてきたが，もっと広く自由に任意の座標変換を考えることはできないのだろうか？ ただその場合，特に加速度がある回転系などの場合には，遠心力やコリオリ力などの見掛けの力が出てきてしまった．そして，これら見かけの力は局所的には重力と区別ができないでいた（等価原理）．これらを考え合わせると，重力はまずそのような見かけの存在として出現するのではないだろうか？ つまり重力は座標の取り方によって消去さえしてしまえる見かけの存在なのではないか？ すると，「本物」の重力場はどこに存在するのだろうか？ 存在するならそれをどのように記述したらいいのだろうか？ この章では，時間空間の一般座標変換を考え，重力の実在を考察しよう．

4 章では空間部分に限って一般の座標変換を考察した．ここでは時間空間の一般座標変換を考えるが，以前の考え方や得られた式は 4 次元の形式にすればほとんどそのまま成立する．時間空間の微小距離（世界間隔）ds^2 は，一般の座標で書くと座標の微分の 2 次形式

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta \tag{6.1}$$

になる $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$．等価原理によって保障される局所慣性系においては計量テンソル $g_{\alpha\beta}(x)$ は，ローレンツ変換のときに議論した形式

$$g^{(0)}_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} \equiv diag(1, -1, -1, -1) \tag{6.2}$$

になる．したがって $g_{ij}(x)$ の固有値は 1 個が正で 3 個が負である．一般の座標変換 R に対して，反変ベクトル場 $A^{\alpha}(x)$ は式 (4.15) と同様にその変換性

$$A'^{\alpha}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}(x) \tag{6.3}$$

で定義できるだろう．n 階反変 m 階共変テンソルは，式 (4.19–4.21) と同様に

$$A'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_m}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_n}}{\partial x^{\gamma_n}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_n}}{\partial x'^{\beta_n}} A^{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}_{\ \delta_1\delta_2\cdots\delta_m}(x) \tag{6.4}$$

に従って変換する物理的実体である．微分も式 (4.27) で導入した共変微分

$$\frac{DA^{\alpha}(x)}{\partial x^{\beta}} \equiv \left(\frac{\partial A^{\alpha}(x)}{\partial x^{\beta}} + A^{\gamma}(x)\, \Gamma^{\alpha}_{\ \gamma\beta}(x) \right) \tag{6.5}$$

を使おう．これらの事情は第 4 章と同じである．ここで平行移動を決める場 $\Gamma^{\alpha}_{\ \gamma\beta}(x)$ がテンソル場ではないことがのちに問題になる．

さまざまな式は第 4 章の空間 3 次元を時間空間 4 次元にして，符号に気をつければ，そのまま成立する．以前のように $g_{\mu\nu}(x)$ が平行移動によって変わらないとすると，

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta} \right) \tag{6.6}$$

となる．不変なテンソルたちは，

$$\delta'^{i}_{\ j} = \delta^{i}_{\ j}, \tag{6.7}$$

$$\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-\det g'}\, \varepsilon_{(0)\alpha\beta\gamma\delta} \tag{6.8}$$

となる．$g_{\mu\nu}$ の固有値は 1 個だけ符号が違うので，$-\det g$ が正の量となる．これらを使った，微小長さ，微小面積，微小 3 次元面積の定義なども以前と同様である．

質量を持った粒子と重力場との相互作用を考えていこう．まず，質点の運動は，以前 $\dot{u}^{\mu} \equiv du^{\mu}/ds$ に対する共変な表式を考えたが，今そもそも $\dot{u}^{\mu}$ 自身が共変でない．すぐ上の議論から共変微分を使うべきである．（重力以外の）外力が働かない場合は

$$\frac{Du^{\mu}}{ds} = 0 \tag{6.9}$$

である．具体的に書くとこれは

$$\frac{du^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \tag{6.10}$$

となる．非相対論的な場合，$\left|u^{i}\right| \ll \left|u^{0}\right| \approx 1$ であり，$s \approx ct$ となる．さらに $\Gamma^{i}_{\ 00} \approx g_{00,i}/2$ なので，この式は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\frac{c^2}{2}g_{00,i}=0 \tag{6.11}$$

となる．したがって，重力場のポテンシャル $\phi(\vec{x})$ を導入すれば，

$$g_{00}\approx\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) \tag{6.12}$$

の対応があることがわかる．したがって $\Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}(x)$ は重力を表していることがわかる．この $\Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}(x)$ がテンソル場ではないので，重力は物理的実体でない，ということになってしまう．つまり，座標系の取り方によって，重力を零から作り出せる（等価原理）という点において，物理的実体らしくないのである．

一方 $g_{\alpha\beta}$ は重力ポテンシャルを表す．その重力ポテンシャル $\phi(x)$ はニュートン力学ではポアソン方程式

$$\Delta\phi=4\pi G\rho \tag{6.13}$$

に従って決まるのだった．式 (6.13) の左辺は式 (6.12) の関係から計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ の 2 階微分である．右辺は物質密度 $\rho(x)$ である．この式は重力場の一般の運動方程式を見出すときに典型として役に立つ．

6.2　重力の場

我々はまだ本当の重力の場を見出せていない．テンソルでない量 $\Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}(x)$ は見かけのものであり，座標の選び方によっては任意のある 1 点において完全に 0 にできるのであった．重力はこのように局所的に見る限り物理的実在とはなりえない．本当の重力場があるならそれは大局的である．それを特徴付ける量を探そう．時空のある閉じた経路に沿ってベクトルを平行移動させたとき，移動前後のベクトルは，時空が大局的構造を持っていれば異なるし，持っていなければ単に元に戻るだろう．このような指標として，平行移動を含む共変な量，つまり共変微分を使おう．閉じた経路として，2 つの異なる共変微分の差を考えるのがよいだろう．実際

$$A^{\alpha}_{\ ;\beta;\gamma}-A^{\alpha}_{\ ;\gamma;\beta}=-A^{\delta}R^{\alpha}_{\ \delta\beta\gamma} \tag{6.14}$$

となる．ただし，曲率 $R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta}(x)$ を

$$R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta}=\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\delta,\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma,\delta}+\Gamma^{\alpha}_{\ \varepsilon\gamma}\Gamma^{\varepsilon}_{\ \beta\delta}-\Gamma^{\alpha}_{\ \varepsilon\delta}\Gamma^{\varepsilon}_{\ \beta\gamma} \tag{6.15}$$

で定義した．曲率は式 (6.14) から 4 階テンソル場であり，式 (6.15) から見かけの重力 $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}$ とその微分 $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma,\delta}$ から構成されている．$\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}(x)$ は座標変換で消せるが $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma,\delta}(x)$ は消せない本当の重力の部分を含むのである．曲率はその部分を含んで構成される共変な量，つまりテンソル場だから物理的な実在と考えられる量である．まとめると，$g_{\alpha\beta}(x)$ は計量であり，時空の長さをはかり，$\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}(x)$ は局所的なみかけの重力を，$R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta}(x)$ は物理的実在としての真の重力

を表す．

式 (6.15) から，$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\equiv g_{\alpha\varepsilon}R^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma\delta})$ はその添え字，$\alpha\beta$ に関して反対称，$\gamma\delta$ に関して反対称，2 つの組 $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$ に対して対称である．したがって $R^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma\delta}$ から縮約によって得られる 2 階のテンソルは唯一に決まる：$R^{\alpha}{}_{\beta}(x) = R^{\alpha}{}_{\gamma\beta\delta}(x)\, g^{\gamma\delta}(x)$．これは対称テンソルである．さらに縮約して，スカラー場 $R(x) = R^{\alpha}{}_{\beta}(x)\,\delta^{\beta}{}_{\alpha}(x)$ を得る．

これをふまえて，重力場 $g_{\alpha\beta}(x)$ に対する発展方程式を立てたい．参考になるのは以上の考察で現れた式 (6.13) で，これは物質が重力場を作るという図式である．これをテンソルの方程式として一般化すればよいだろう．この式の左辺は計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ の 2 階微分である．計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ の 2 階微分を含む共変な量として曲率 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}(x)$ がすでに見出されている．式 (6.13) の右辺は物質密度 $\rho(x)$ である．この量を含む共変な量としては，物質のエネルギー運動量ベクトル場 $p^{\alpha}(x)$ か，あるいは物質のエネルギー運動量テンソル場 $T^{\alpha\beta}(x)$ かであり，これらが線形に入ってくるはずである．左辺として 4 階の $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}(x)$ を採用すると，その反対称性（$\alpha\beta$, $\gamma\delta$ それぞれに関して反対称）と整合するように右辺を作らなければならない．これは $p^{\alpha}(x)$ でも対称な $T^{\alpha\beta}(x)$ からも構成できない．したがって左辺は，曲率を縮約した $R^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, $\delta^{\beta}{}_{\alpha}(x)\,R(x)$ であるはずで，これは $\alpha\beta$ に関して対称である．したがって右辺は $T^{\alpha\beta}(x)$ でなければならない．

$$R^{\alpha}{}_{\beta} + a\delta^{\beta}{}_{\alpha}R = bT^{\alpha\beta}. \tag{6.16}$$

係数は重力場が弱い極限で式 (6.13) と $T^{\alpha\beta}(x)$ の保存則 $T^{\alpha\beta}_{;\beta}(x) = 0$ を満たすように決める．すると，$a = -1/2$, $b = 8\pi G/c^4$ と決まり，最終的に

$$R^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}{}_{\alpha}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha}{}_{\beta} \tag{6.17}$$

となる．これはアインシュタイン方程式と呼ばれ，宇宙の膨張やブラックホール，重力波の伝播などを決める基本方程式である．

このように，単に見かけの存在だけと思われた重力は，曲率 $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}(x)$ テンソル場として物理的実在として考えられることがわかった．さらに，それを縮約した場 $R^{\alpha}{}_{\beta}$ の形で，物理的実在である物質のエネルギー運動量テンソル場 $T^{\alpha\beta}(x)$ と関わるのである．

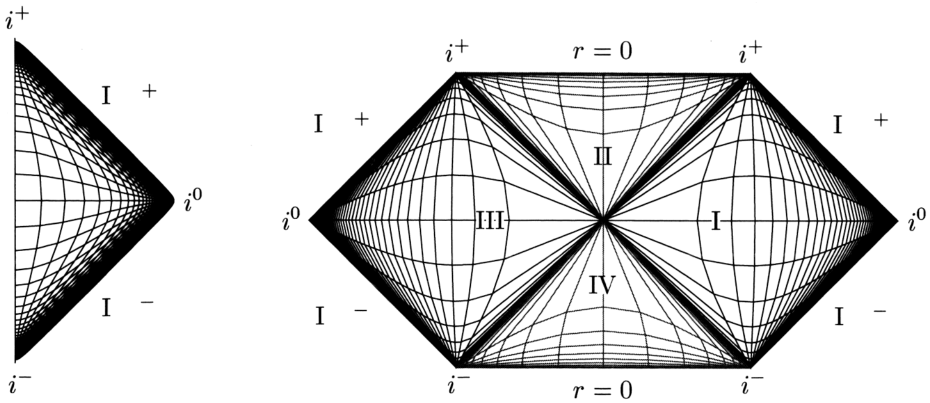


図 6.1 アインシュタイン方程式の解の例．

左：ミンコフスキー時空．角度方向 θ, ϕ は省略して r, ct 座標だけ表記している．arctan 関数を用いて変数変換し，本来無限遠点を有限の位置に対応させる座標を使っている（ペンローズ図）．ただし，光は常に 45 度の直線を走るように座標は構成されている．45 度より寝た横向きの線は時間座標 t 一定，45 度より立った縦向きの線は空間座標 r 一定の線群を表す．i^0, i^+, i^-, I^+, I^- はそれぞれ，空間的無限遠点，時間的無限遠点（未来），時間的無限遠点（過去），光の無限遠点（未来），光の無限遠点（過去）を表す．無限遠領域を有限距離に持ってきたので，縁の部分は非常に歪んでいる．

右：シュバルツシルト時空．静止した球対称ブラックホールのある時空を表す．表示の方法は左図と同じ．ただ，指数関数，arctan 関数，特異な変数 $r^* = r - \ln(r - r_g)$ などを用いてより複雑に変数変換している．領域 I，II の境界が事象の地平線 $(r = r_g)$，領域 I のグリッドは 45 度より寝た横向きの線は時間座標 t 一定，45 度より立った縦向きの線は空間座標 r 一定の線群を表す．領域 II ではこの対応が逆転する．i^0, i^+, i^-, I^+, I^- は左図と同じ．領域 II はブラックホールの事象の地平線の内側．上端に特異点 $r = 0$ がある．領域 III,IV はそれぞれ領域 III,IV の時間反転．

【参考書籍】

一般相対性理論は膨大な体系である．じっくりと取り組むのがよいと思う．

- 「一般相対性理論」（物理学選書 15），内山龍雄，裳華房 (1978).
- "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", Steven Weinberg, Wiley (1972).

第 7 章

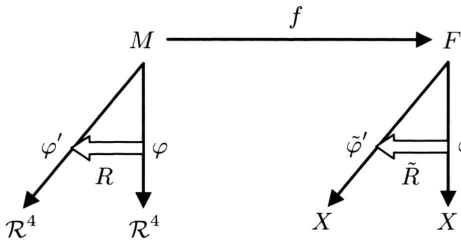
物理的実在の広がり

我々は，自然を認識する基本は写像であるというところから出発した．その写像の中に，いろいろな見方を試みて，そのものに対する何らかの系統的な相関がいつもあれば，それをより所として，自己同一性を持った物理的実在を同定し，それらの間の普遍的構造の枠を見出してきた．この写像を定量的に記述するのに必ずモデルが必要であった．それは座標系であったり，いろいろな見方を与える変換であったり，想定する空間であったり，そして場の種類であったりした．自己同一性を持った物理的実在を取り出すのに本質的に重要だったのは，相対性原理，近接作用の原理，と場の概念であった．うまくいけば，それら実在物の時間空間発展に関して，実験と整合する基本方程式を得ることができた．うまくいかない場合は，我々はそれらのモデルを適宜変更し拡大し，試行錯誤を重ねて，物理的実在の構造を深く捉えようと試みてきた．

第 2 章では，回転変換に対して，全空間で線形性を前提に系統的な変換性を探し，テンソル場という有用な種族を見出した．第 3 章では，そのようなテンソル場族が作るさまざまな構造と法則を，物理法則の共変性をより所として追究してきた．第 4 章では，もっと大局的な視点を取り，一般の空間座標系を考えた．この場合にも，各点各点でテンソル族を構成できるが，ひとたび微分操作という空間の異なる点のテンソルを比較するときに，異なる点で独立して存在しているテンソル族の関係を結び付ける接続場が必要であることが見出された．第 5 章では，3 次元空間内での見方の変換だけではなく，時間空間を一体の混ざり合うものとして 4 次元時空を考えた．この考えは，実験から得られた光速度不変性から要求されたものであった．このように変換が拡大されることによって，時空概念もユークリッド空間からミンコフスキー空間に拡張され，物理的実在の概念は拡大された．変換が拡大されることは，物理的実在物のファミリーが大きくなることを意味する．例えば，3 次元空間の回転変換を扱っているときには無縁であった電場と磁場は，4 次元のローレンツ変換に関しては，お互いに移り変わりあう存在である．このように，本来電場と磁場はお互いに

移りあい，総体として自己同一性を持った同じものであったのである．第6章では，4次元時空の上で，一般の座標系を考えた．この場合にも，異なる時空点で独立して存在しているテンソル族の関係を結び付ける接続が必要であった．この役を担う接続の場は，もはやテンソル場ではないが，質点の運動に見掛けの力を及ぼした．これが等価原理を満たした重力そのものであった．しかし重力が完全に見かけだけの存在であったわけではない．接続の場からテンソルが構成され，重力場を自己同一性を持った実在として考えられる基盤ができた．

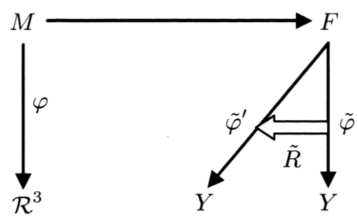
もともと考察していたのは，場 f であり，



(7.1)

という構造の写像であった．表現の空間 X は例えば $\mathcal{R}^4$ であったり $\mathcal{C}^2$ であったりそれらの重ねあわせだったりした．そして，座標変換 R（つまり見方 φ を変える変換）に誘導された変換 $\tilde{R}$ で場も系統的に変換された．上の式で F という空間は，各点 $P \in M$ で M に接するように作られた線形空間 T_P の総体 $\{T_P|P \in M\} \equiv T(M)$ である．この様子は図7.1（左）のようになる．異なる点をつなぐのが接続場 $\Gamma(x)$ であった．これで場 f 全体が，微分や平均といった非局所操作を含めて，把握できるようになる．

しかしもともとの問題，つまり見方を変えたとき系統的な見え方をする様相が物理的実在である，と考える立場に立ち返ると，座標変換に誘導されない時間空間座標と独立した変換 $\tilde{R}$ があってもよい：



(7.2)

つまり「見方を変える」とするとき，時間空間に固執してそれに関連する見方だけを考えなくてもよいだろう．時空に関係ない何らかの変換 R のもとで，系統的な応答 $\tilde{R}$ をする様相として実在を規定することもできるだろう．このような意味の物理的実在は，以前の（時間空間に関連した）物理的実在とは独立な概念である．このことを図7.1（右）に表現した．各点に付随した縦棒は時空に独立な表現の空間 X である．つまり物理的実在は，もっと広く，系統的な見え方の数だけあることになる．

例えば，クライン・ゴルドン方程式 (5.69),

$$\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{7.3}$$

を考えてみよう．複素数の場 $\Psi(x)$ は，そのまま観測量と結びつくわけではなく，式 (3.92) などで見たように物質密度や観測量は Ψ とその複素共役 Ψ^* との積で与えられる．従って，複素数 $\Psi(x)$ を位相 θ だけずらして $\Psi(x)\,e^{i\theta}$ としても観測量は不変である．複素数場を考えても，位相そのものは一般に観測される量には登場しないのである．特に量子力学にはこのような位相変換に対する不変性がある．時空に関連した変換 R や応答 $\tilde{R}$ が時空の各点で個別に行われていたのと同様に，位相の変換 $\theta(x)$ も同様に本来局所的である．

$$\tilde{R}:\Psi(x)\to\Psi(x)\,e^{i\theta(x)}. \tag{7.4}$$

このような変換 $\tilde{R}$ をゲージ変換という．すると，重力場のときと同じように，微分量を考えたとき，それはもはや単純な位相変換 $\partial_\mu\Psi(x)\to(\partial_\mu\Psi(x))\,e^{i\theta(x)}$ ではなくなる：

$$\partial_\mu\Psi(x)\to(\partial_\mu\Psi(x))\,e^{i\theta(x)} + i\,(\partial_\mu\theta(x))\,\Psi(x)\,e^{i\theta(x)}. \tag{7.5}$$

したがって，このままでは微分量に関しては位相変換の不変性が壊れてしまう．この不都合は，各点での位相変換の基準がなく，場所場所で勝手に位相変換が遂行されることによる．一般相対論において，平行移動を導入して場所ごとに異なるベクトル場の向きの基準を接続の場 $\Gamma(x)$ で設定したように，位相の基準を保障する場がここでも必要になるだろう．それを実数の場 $A_i(x)$ と書いて「共変な」微分を

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu(x) \tag{7.6}$$

で定義しよう．ただし，このように導入された場 $A(x)$ はもともと実数であるし，接続の場 $\Gamma(x)$ でもそうであったとおり，単純な位相変換をしない．ただし，ゲージ変換に対して，

$$\tilde{R}:A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\theta(x) \tag{7.7}$$

と変換する設定とすれば，式 (7.6) を微分に用いたクライン・ゴルドン方程式

$$\left(g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{7.8}$$

の位相変換 (7.4) に対する共変性が保障される*1.

場 $A_\mu(x)$ の位相変換に対する応答が（式 (7.4) のようでなく）式 (7.7) にあるように奇妙なので，位相変換という見方の変更に対しては，場 $A_\mu(x)$ は物理的実在ではないように考えられる．しかし重力場のときと同じように，大局的

*1 式 (7.5) の第 2 項が式 (7.7) の第 2 項と相殺する．

な量 $D_\mu D_\nu \Psi - D_\nu D_\mu \Psi$ を考えると，これは

$$D_\mu D_\nu \Psi - D_\nu D_\mu \Psi = -iF_{\mu\nu}\Psi \tag{7.9}$$

となる．ただし，

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7.10}$$

を定義した．式 (7.7) から，この量は位相変換に対して不変であり，位相変換に対しての物理的実在であると考えられる．

ここで，以上の話と電磁場の理論が酷似していることが気づく．式 (7.7) は式 (3.116, 3.117) と同じである．$A_\mu(x)$ は電磁場のポテンシャルであり，$F_{\mu\nu}(x)$ は式 (5.47) の電磁場の強さそのものである．式 (7.6) は物質場の方程式の中に電磁場がどのような形で入り込んでくるかを自動的に規定し，両者の相互作用を完全に決める．つまり，局所位相変換に対する共変性の要請が場 $A_\mu(x)$ を必然とし，これが電磁気力を記述した．重力の場合も，一般座標変換に対する共変性の要請が場 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ を必然とし，これが重力を記述した．

重力の物理的実在を表すテンソル場，曲率 $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}(x)$ がいたるところ零であっても，テンソル場ではない接続 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ は有限に存在できる．そもそもこれが等価原理であり，一般相対論の出発点であった．接続 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ はテンソル場ではないから物理的実在ではないとは言い切れない事情がここにある．特定の座標系では見かけの力として $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ は有限なのである．同様のことは電磁場にも当てはまる．物理的実在である電磁場を表すゲージ不変な場 $F^\mu_\nu(x)$ が零であっても，つまり $\vec{E}=0$, $\vec{H}=0$ であってもゲージ不変でない場 $A^\mu(x)$ は有限に存在できる．これは電子の波の位相を変化させ，干渉効果を示す（アハラノフ・ボーム効果）*2．これは実験的にも確認されている．従って，このような接続場は，$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ がテンソルとして振る舞わないとか $A^\mu(x)$ が他の物質のように位相変換しないとか，いささか特異な性質があるにもかかわらず，一応見え方は系統的であり，その存在は実験的にも支持されている．

さらに，これら特異な場こそが自然界の基本的な力を媒介するという事実も興味深い．これは以上見た重力や電磁気力に限らず，強い相互作用や弱い相互作用といった，現在知られれている 4 つの基本的な力すべてに共通した事実である．これから，自然界のすべての力はこのように，何らかの局所対称性のいわば埋め合わせとしてその存在が必然となる接続場に由来するという考え方は，おびただしい実験的検証を通して確立し，現在では原理（ゲージ原理）とさえなっている．

このように，強い力・弱い力など他の基本相互作用も，時空と独立な局所ゲージ変換に対する不変性の要請から自然に導かれる．いずれも，局所変換という

*2 Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, Phys. Rev. 115, 485–491 (1959).

見方の変更に対して，系統的な見え方をするものが物理的実在であり，物理法則はそのような実在に対してやはり系統的な見え方を保障する形で存在する．時空と独立な局所変換を考えているので，対応する接続場は，内部空間での変位を促す．この局所変換をどんどん拡大していくと，一般に物理的実在は大きなファミリーを作るようになり，より小さな変換によって規定されていた独立な複数の物理的実在のファミリーを含むようになる．より多くのものがお互いに移り変わり，物理的実在の普遍性が増加するが，逆に見れば，個々の実在物の個性が失われていくことにもなる．

この，より大きな物理的ファミリーはエネルギースケールが上がるほど顕著になり，それは例えば宇宙の進化を昔にたどることになる．これを逆に見れば，宇宙の進化の中で個性を持った実在のファミリーが次々に誕生していったことにもなる．この続きは，皆さんの興味に従って教科書や文献を参考にしながら，さらに進んでいただきたいと思う．

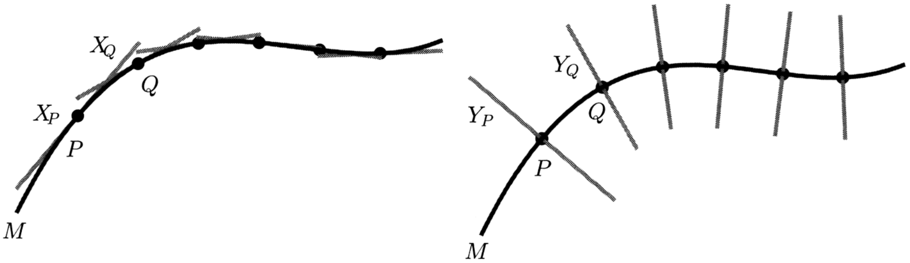


図 7.1

左：空間 M の各点 $P, Q, \cdots$ ごとに作られるベクトル空間 $X_P, X_Q, \cdots$ たち．
右：空間 M の各点 $P, Q, \cdots$ ごとに，座標とは独立に作られる空間 $Y_P, Y_Q, \cdots$ たち．

【参考書籍】

- 「多様体の基礎」（基礎数学），松本幸夫，東京大学出版会 (1988).

索　引

著者略歴

森川 雅博
もりかわ まさひろ

1987 年　京都大学大学院理学研究科博士後期課程（物理学第 2 専攻）進学修了
1987 年　日本学術振興会 特別研究員（大阪大学，京都大学）
1989 年　日本学術振興会 海外特別研究員（ブリティッシュ・コロンビア大学 客員研究員）
1992 年　京都大学理学部物理第 2 教室助手
現　在　お茶の水女子大学理学部物理学科教授
専門　宇宙物理学

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 78
『重点解説 ベクトル・テンソル　物理的実在を求めて』
著　者　森川 雅博
2010 年11月25日　初版発行

数理科学編集部　　　発行人　木下敏孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．
表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL.(03)5474–8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474–8600(広告部)

組版　ビーカム
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-73：for Senior & Graduate Courses）

問題例で深める物理

統一的思考力を身につけるために

香取　眞理・中野　徹　共著

本体 1981 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

「数理科学」誌の連載「問題例で深める物理」（2009年2月号〜2010年1月号（全12回））の待望の一冊化．本書では，古典から現代までの物理の科目別の分類を縦糸とし，数学的な手法や捉え方による分類を横糸として織り成される物理学の美しい織物を統一的な視点から俯瞰する．豊富な演習問題と解答，Problem，Answer，Discussion という流れに沿った解説は，大学院入試対策にも適している．物理の考え方の普遍性をも伝える得難い一冊．

サイエンス社